RADICI n-ESIME DELL'UNITÀ

Si chiama **RADICE n-ESIMA DELL'UNITÀ** (con $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$) ogni numero complesso z tale che $z^n = 1$.

ESEMPI

1) $n=2$ le radici quadrate dell'unità sono $z_0 = 1$, $z_1 = -1$

le radici quadrate dell'unità sono le soluzioni dell'equazione $z^2 = 1$

2) $n=3$. Troviamo le radici cubiche dell'unità. Esse sono le soluzioni dell'equazione

$$z^3 = 1 \qquad z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

$$\Downarrow$$

$$\rho^3(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^3 = 1$$

$$\rho^3\big(\cos(3\vartheta) + i\sin(3\vartheta)\big) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$0 \le \vartheta < 2\pi \qquad \begin{cases} \rho = 1 \\ \cos 3\vartheta = 1 \\ \sin 3\vartheta = 0 \end{cases}$$

MULTIPLI DI 2π

$3\vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = 0$

$3\vartheta = 2\pi \Rightarrow \vartheta = \frac{2}{3}\pi$

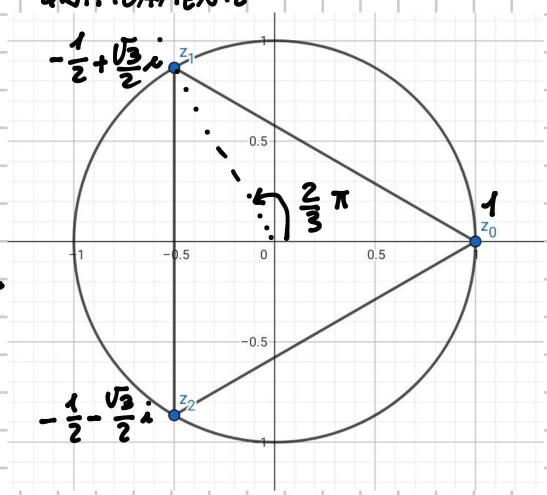
$3\vartheta = 4\pi \Rightarrow \vartheta = \frac{4}{3}\pi$

$z_0 = 1$

$z_1 = 1\cdot\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_2 = 1\cdot\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

GRAFICAMENTE



CASO $n=3$

In generale: l'equazione $z^n = 1$ ha n soluzioni, vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di centro $O(0,0)$ e raggio 1

In generale le radici n-esime dell'unità sono date dalla formula

$$\boxed{z_K = \cos\frac{2K\pi}{n} + i\sin\frac{2K\pi}{n} \qquad K = 0, 1, 2, \dots, n-1}$$

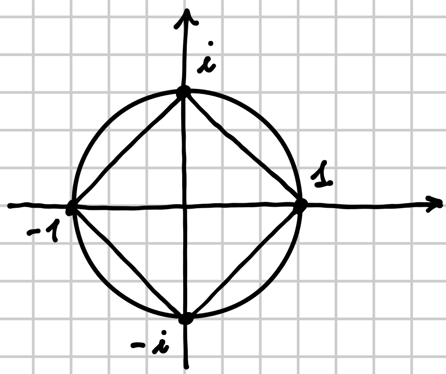
CASO $n=4$

$$z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$z_3 = \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = -i$$



Calcolare le radici dell'unità nel caso

350 $n=8$

$\left[u_0 = 1, u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, u_2 = i, u_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, u_4 = -1, u_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, u_6 = -i, u_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$z_0 = 1$

$z_1 = \cos\frac{2\pi}{8} + i\sin\frac{2\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_2 = \cos\frac{4\pi}{8} + i\sin\frac{4\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

$z_3 = \cos\frac{6\pi}{8} + i\sin\frac{6\pi}{8} = \cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_4 = \cos\frac{8\pi}{8} + i\sin\frac{8\pi}{8} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

$z_5 = \cos\frac{10\pi}{8} + i\sin\frac{10\pi}{8} = \cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_6 = \cos\frac{12\pi}{8} + i\sin\frac{12\pi}{8} = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = -i$

$z_7 = \cos\frac{14\pi}{8} + i\sin\frac{14\pi}{8} = \cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$