INTRODUZIONE ALLE RADICI N-ESIME DI UN NUMERO COMPLESSO QUALSIASI

358 $4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $\quad n = 2$

trovare le 2 radici quadrate, cioè le 2 soluzioni dell'equazione

$$z^2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Scrivo z in forma trigonometrica $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$
e lo sostituisco nell'equazione

$$\rho^2(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rho^2\left(\cos(2\vartheta) + i\sin(2\vartheta)\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \rho^2 = 4 \\ \cos 2\vartheta = \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin 2\vartheta = \sin\frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 2 \\ 2\vartheta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{6} + k\pi \qquad k = 0, 1$$

Quindi le 2 radici quadrate
che cercavo sono

$k=0 \Rightarrow z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

$k=1 \Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\sqrt{3} - i$

RADICI N-ESIME DI UN NUMERO COMPLESSO

Dato $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ e un numero $z \in \mathbb{C}$ si chiama **RADICE N-ESIMA** di z ogni numero complesso w tale che

$$w^n = z$$

FORMULA GENERALE

Se $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

$$\boxed{z_k = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\vartheta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1}$$

Infatti $z_k^n = \left(\rho^{\frac{1}{n}}\right)^n\left(\cos n \cdot \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} + i\sin n \cdot \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) =$

$$= \rho\left(\cos(\vartheta + 2k\pi) + i\sin(\vartheta + 2k\pi)\right) = z$$

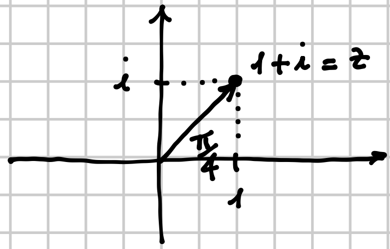
IN PRATICA: trovo la 1ª radice $\rightarrow$ $z_0 = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\vartheta}{n} + i\sin\frac{\vartheta}{n}\right)$

$\downarrow$

le altre si trovano in successione facendo ruotare il vettore posizione di $\frac{2\pi}{n}$

ESEMPIO

Calcolare le radici 3° (cubiche) di $z = 1 + i$



1° PASSO → trasformo z in forma trigonometrica

$$\rho = \sqrt{2} \qquad \vartheta = \frac{\pi}{4} \implies z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

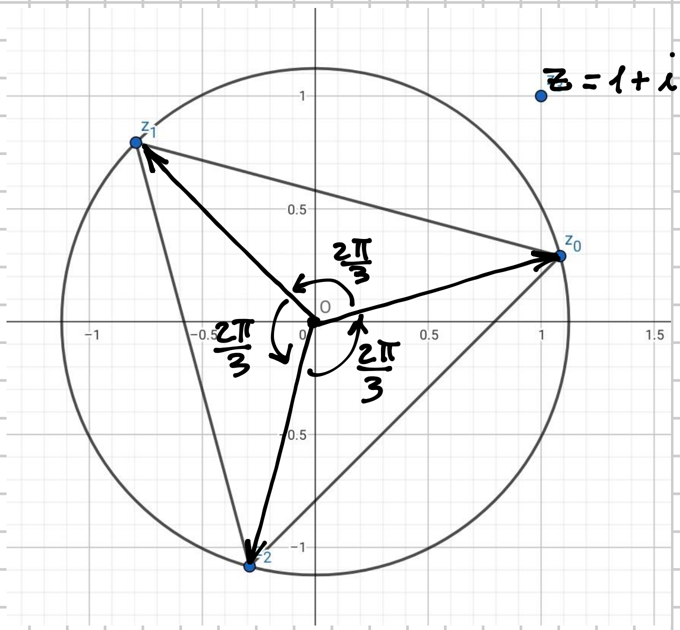
$$z_0 = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}}{3} + i \sin\frac{\frac{\pi}{4}}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi + 8\pi}{12} = \frac{3}{4}\pi$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i \sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$\frac{3}{4}\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{9+8}{12}\pi = \frac{17}{12}\pi$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi + i \sin\frac{17}{12}\pi\right)$$



Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$

385 $x^2 - 4x + 13 = 0$ $[2 \pm 3i]$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 16 - 52 = -36 < 0$$

Calcolo le 2 radici quadrate di Δ $\Rightarrow \begin{cases} z_0 = \sqrt{|\Delta|}\, i = 6i \\ z_1 = -\sqrt{|\Delta|}\, i = -6i \end{cases}$

$$x = \frac{4 \pm 6i}{2} = \begin{cases} \dfrac{4-6i}{2} = 2 - 3i \\ \dfrac{4+6i}{2} = 2 + 3i \end{cases}$$

$$\boxed{x = 2 \pm 3i}$$

Infatti: $(2-3i)^2 - 4(2-3i) + 13 = 4 + \overbrace{(-3i)^2}^{-9} - \cancel{12i} - 8 + \cancel{12i} + 13 = 0$

$(2+3i)^2 - 4(2+3i) + 13 = \dots = 0$

PER CALCOLARE LE RADICI QUADRATE (COMPLESSE) DI UN NUMERO REALE a

$a > 0 \Rightarrow$ $z_0 = \sqrt{a}$ $z_1 = -\sqrt{a}$ $\vartheta = 0$

$a < 0 \Rightarrow$ $z_0 = \sqrt{|a|}\, i$ $z_1 = -\sqrt{|a|}\, i$ $\vartheta = \pi$

Ad esempio $z = -2$

$z = 2(\cos\pi + i \sin\pi) \Rightarrow$ $z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\, i$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i \sin\frac{3}{2}\pi\right) = -\sqrt{2}\, i$

392 $x^4 + 23x^2 - 50 = 0$ $[\pm\sqrt{2}, \pm 5i]$

$$(x^2+25)(x^2-2)=0$$

$x^2-2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

$x^2+25=0$

$\Downarrow$

$x^2=-25 \Rightarrow x=\pm 5i$

$$\boxed{x=\pm\sqrt{2} \vee x=\pm 5i}$$

387 $x^2 - 6x + 13 = 0$ $[3 \pm 2i]$

$\frac{\Delta}{4} = 9-13=-4$ $z_{0,1} = \pm 2i$ radici quadrate di -4

$$\boxed{x=3\pm 2i}$$