393 $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ $\left[-2, 1 \pm i\sqrt{3}, 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right]$

$t = x^3$

$t^2 + 7t - 8 = 0 \qquad \Delta = 49 + 32 = 81$

$(t+8)(t-1) = 0$

$t = -8 \quad \vee \quad t = 1$

$x^3 = -8 \quad \vee \quad x^3 = 1$

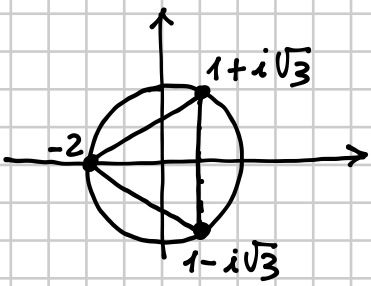
Calcolo le radici cubiche di -8

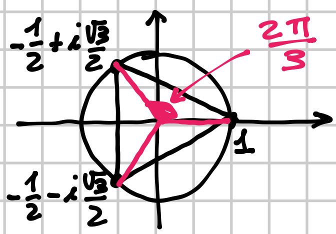
$z = -8 = 8 \cdot (-1) = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$

$z_0 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

$z_1 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right) = 2(-1 + i \cdot 0) = -2$

$z_2 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i \cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 1 - i\sqrt{3}$





Calcolo le radici cubiche di 1

$1 = (\cos 0 + i\sin 0)$

$z_3 = \left(\cos\frac{0}{3} + i\sin\frac{0}{3}\right) = 1$

$z_4 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_5 = \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

L'insieme delle soluzioni è

$S = \left\{-2, 1, 1 \pm \sqrt{3}i, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

- $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$
- $P(z)$ è un polinomio di grado n a coefficienti in $\mathbb{C}$
- a coefficiente di z^n in $P(z)$

$\Rightarrow \exists\, z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ tali che $P(z) = a(z-z_1)\cdot(z-z_2)\cdot\ldots\cdot(z-z_n)$

EQUIVALENTEMENTE

Ogni equazione algebrica di grado n in campo complesso

$$P(z) = 0$$

POLINOMIO DI GRADO n A COEFF. IN $\mathbb{C}$

ha n soluzioni (pur di contare ogni soluzione secondo la sua molteplicità).

COROLLARIO

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$P(z)$ POLINOMIO DI GRADO n A COEFFICIENTI IN $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ le soluzioni non reali di $P(z)=0$ sono a 2 a 2 coniugate e 2 soluzioni coniugate hanno la stessa molteplicità.

$\Rightarrow$ ogni equazione algebrica (a coeff. reali) di grado dispari ha almeno una soluzione reale

EQUAZIONI DI 2° GRADO

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{C} \qquad a \neq 0$$

$$\Rightarrow \qquad z = \frac{-b + r}{2a} \quad \vee \quad z = \frac{-b - r}{2a}$$

dove r è <u>una</u> delle 2 radici quadrate di $\Delta = b^2 - 4ac$

398 $x^2 - 2ix + 3 = 0$ $\qquad [3i, -i]$

I coefficienti sono complessi $\qquad \beta = -i$

$$\frac{\Delta}{4} = \beta^2 - ac = -1 - 3 = -4$$

le due radici di -4 sono $\pm 2i$

$$x = i \pm 2i = \begin{cases} -i \\ 3i \end{cases}$$

$$\boxed{x = -i \quad \vee \quad x = 3i}$$