FORMA ESPONENZIALE DI UN NUMERO COMPLESSO

DEFINIZIONE

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ $\quad [z = x + iy]$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

ESPONENZIALE COMPLESSO

In particolare:

per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$

$$\boxed{e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i \sin\vartheta}$$

Quindi ogni numero complesso z si può scrivere

$$z = \rho e^{i\vartheta} \qquad \rho = |z| \text{ modulo di } z$$

Si ha:

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i \sin\pi = -1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

FORMULA PIÙ BELLA DELLA MATEMATICA

↓

compaiono i cinque numeri fondamentali $e, i, \pi, 1, 0$ e le relazioni $+, =$

TEOREMA

Per ogni coppia di numeri complessi z_1, z_2 si ha:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

OSSERVAZIONI

1) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$ dunque l'esponenziale complesso **NON SI ANNULLA MAI**

2) $e^{z_1} = e^{z_2}$ se e solo se $z_1 - z_2 = 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z}$ dunque l'esp. complesso **NON È INIETTIVO**

3) $z^n = (\rho e^{i\vartheta})^n = \rho^n e^{in\vartheta}$

ESEMPIO PUNTO 2)

$z_1 = 3+5i$ $\qquad e^{z_1} = e^3 \cdot e^{5i} = e^3(\cos 5 + i \sin 5)$

$z_2 = 3+(5+2\pi)i$ $\qquad e^{z_2} = e^3 \cdot e^{(5+2\pi)i} = e^3(\cos(5+2\pi) + i\sin(5+2\pi))$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad \Downarrow$

$z_1 \neq z_2$ $\qquad e^{z_1} = e^{z_2}$

Formule di Eulero

Consideriamo le uguaglianze $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ ed $e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$.

- Sommiamo membro a membro:

$$\begin{array}{rl} + & e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \\ & e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha \\ \hline & e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha \quad \to \end{array}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}}.$$

- Sottraiamo membro a membro:

$$\begin{array}{rl} - & e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \\ & e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha \\ \hline & e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i\sin\alpha \quad \to \end{array}$$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}}.$$

Le quattro formule evidenziate sono dette **formule di Eulero**.

Per $\alpha = \pi$ la prima formula è $e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$: $\boldsymbol{e^{\pi i} + 1 = 0}$, dove compaiono insieme cinque numeri importanti: 1, 0, e, π, i.

412 Indicato con s il complesso coniugato di $z = x + yi$, scrivi l'equazione $s = z^2$. Dimostra che i soli quattro numeri complessi $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sono soluzioni dell'equazione. Determina poi il modulo di z_3 e rappresenta nel piano di Gauss il vettore $v = z_2 + 4z_3$. $[|z_3| = 1]$

$z = x + iy \qquad \bar{z} = x - iy = s$

$s = z^2 \implies \bar{z} = z^2$

$x - iy = (x + iy)^2$

$x - iy = x^2 - y^2 + 2xyi$

$(x^2 - y^2 - x) + i(2xy + y) = 0$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x^2 - y^2 - x = 0 \\ 2xy + y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 - x = 0 \\ y(2x+1) = 0 \end{cases} \iff y = 0 \lor 2x + 1 = 0$

$\begin{cases} x^2 - y^2 - x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \lor \begin{cases} x^2 - y^2 - x = 0 \\ 2x + 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \lor \begin{cases} \frac{1}{4} - y^2 + \frac{1}{2} = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x(x-1) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \lor \begin{cases} y^2 = \frac{3}{4} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\swarrow$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \lor \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \lor \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \lor \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$z_1 = 0$

$z_2 = 1$

$z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \qquad |z_3| = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

$z_2 = 1$

$$z_2 + 4z_3 = 1 + 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) =$$

$$= 1 - 2 + 2\sqrt{3}\, i = -1 + 2\sqrt{3}\, i$$