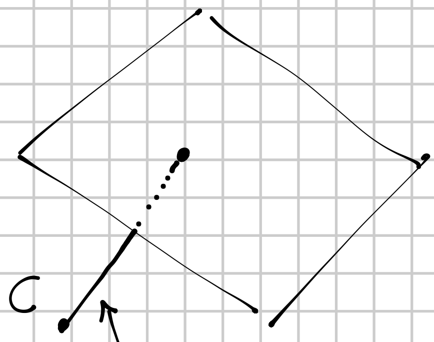
343 Trova l'equazione della superficie sferica di centro $C(2;3;-1)$ e tangente al piano di equazione $x+y-z+2=0$. $[3x^2+3y^2+3z^2-12x-18y+6z-22=0]$



il raggio è la distanza
tra il centro C e il piano tangente

$$r=\frac{|x_0+y_0-z_0+2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2+3-(-1)+2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{3}}$$

sfera $\Rightarrow$ $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=\frac{64}{3}$

$$x^2+4-4x+y^2+9-6y+z^2+1+2z-\frac{64}{3}=0$$

$$x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z+14-\frac{64}{3}=0$$

$$3x^2+3y^2+3z^2-12x-18y+6z+42-64=0$$

$$\boxed{3x^2+3y^2+3z^2-12x-18y+6z-22=0}$$

292 Scrivi l'equazione del piano α passante per il punto $A(0;2;-1)$ e parallelo al piano π contenente la retta r di equazioni $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{2}=z+1$ e il punto $B(0;10;-1)$. $[7x+y-16z-18=0]$

La retta si può scrivere
$$\begin{cases} \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{2} \\ \frac{y-3}{2}=z+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-1=y-3 \\ y-3=2z+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+2=0 \\ y-2z-5=0 \end{cases}$$
$\Rightarrow$ faccio la COMBINAZIONE LINEARE DI QUESTE 2 EQUAZIONI

$$x-y+2+K(y-2z-5)=0$$
generico piano che contiene la retta (al variare di K)

SOSTITUISCO $B(0,10,-1)$ e trovo K

$$-10+2+K(10+2-5)=0$$
$$-8+7K=0 \qquad K=\frac{8}{7}$$

quindi il piano è $x-y+2+\frac{8}{7}(y-2z-5)=0$

$$x-y+2+\frac{8}{7}y-\frac{16}{7}z-\frac{40}{7}=0$$
$$7x-7y+14+8y-16z-40=0$$
$$7x+y-16z-26=0$$

piano parallelo $7x+y-16z+R=0$ facciamolo passare per $A(0,2,-1)$

$$2+16+R=0 \Rightarrow R=-18$$

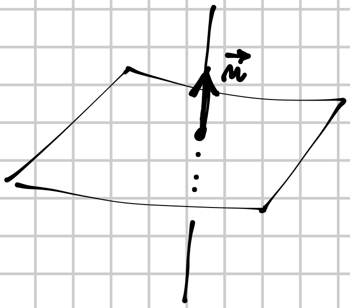
$$\boxed{7x+y-16z-18=0}$$

293 Scrivi l'equazione del piano α contenente la retta r di equazioni $\begin{cases} x-y+z+2=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$ e perpendicolare alla retta s di equazioni $\frac{x-1}{3} = y-1 = z-1$. [$3x+y+z+4=0$]

generico piano che contiene la retta r è:

$$x - y + z + 2 + K(x+y+1) = 0$$

per essere $\perp$ alla retta, il suo vettore normale deve avere la stessa direzione della retta



$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$$

$\vec{n} = (3, 1, 1)$ vettore della retta

piano $x + Kx - y + Ky + z + 2 + K = 0$

$$(1+K)x + (K-1)y + z + 2 + K = 0$$

il vettore normale del piano deve essere proporzionale al vettore della retta

$$\begin{cases} 1+K = 3t \\ K-1 = t \\ 1 = t \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 = 3 \\ K = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

il sistema ha soluzione

Sostituisco $K=2$ nell'eq. del piano

$$\boxed{3x + y + z + 4 = 0}$$

82 In un riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$, data la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 + t \\ z = kt \end{cases}$$

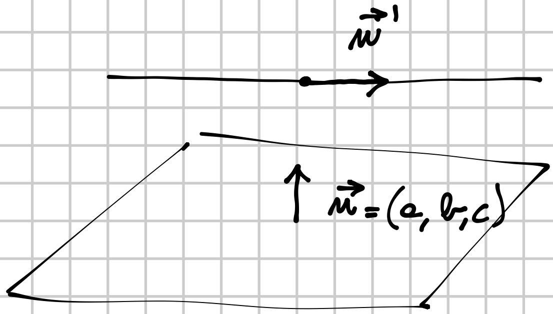
e il piano P di equazione:

$$x + 2y - z + 2 = 0,$$

determinare per quale valore di k la retta r e il piano P sono paralleli, e la distanza tra di essi.

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione straordinaria*, 2015, *quesito* 9)

$\left[k = 4, \frac{5}{6}\sqrt{6}\right]$



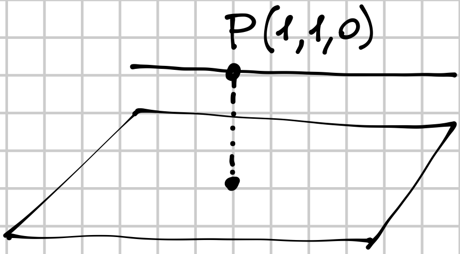
$\vec{n}' \cdot \vec{n} = 0$

devono essere perpendicolari

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 0 + Kt \end{cases} \qquad \vec{n}' = (2, 1, K) \qquad \vec{n} = (1, 2, -1)$$

$\vec{n}' \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + K(-1) = 0$

$4 - K = 0 \Rightarrow \boxed{K = 4}$



la retta è

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 0 + 4t \end{cases}$$

e passa per $P(1,1,0)$

calcolo la distanza di P dal piano

$$d = \frac{|1 + 2 - 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{5\sqrt{6}}{6}}$$