80 Date le rette:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t, \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases},$$

$\begin{cases} x = z \\ y = 2x \end{cases}$

e il punto $P(1; 0; -2)$ determinare l'equazione del piano passante per P e parallelo alle due rette.

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria*, 2016, *quesito* 9)

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2x + t - 3 = 0 \\ y = 2x \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x = 3 - t \\ // \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{3}t \\ y = 2 - \frac{2}{3}t \\ z = t \end{cases}$$

$\vec{v}_1 = (1, 2, 1)$

$\vec{v}_2 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)$

PIANO $ax + by + cz + d = 0$ $\quad \vec{n} = (a, b, c)$

pass. per P

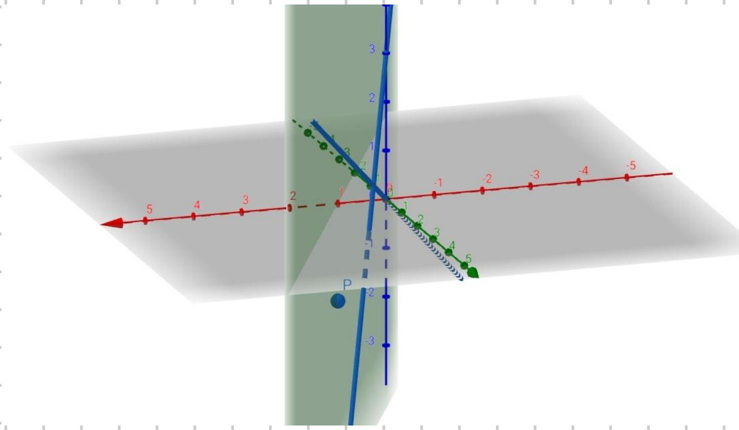
$$\begin{cases} \vec{v}_1 \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{n} = 0 \\ a + 0 \cdot b - 2c + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ -\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b + c = 0 \\ a - 2c + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2c - d + 2b + c = 0 \\ -\frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d - \frac{2}{3}b + c = 0 \\ a = 2c - d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3c = -2b + d \\ -2c + d - 2b + 3c = 0 \\ a = 2c - d \end{cases} \qquad \begin{cases} 6b - 3d = -2b + d \\ c = 2b - d \\ a = 2c - d \end{cases} \qquad \begin{cases} 8b = 4d \\ c = 2b - d \\ a = 2c - d \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{1}{2}d \\ c = 2b - d \\ a = 2c - d \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}$$

$-2x + y + 2 = 0$

$$\boxed{2x - y - 2 = 0}$$



85 Nello spazio sono dati due piani α e β rispettivamente di equazione:

$$\alpha: x - 3y + z - 5 = 0; \quad \beta: x + 2y - z + 3 = 0.$$

Dopo aver determinato l'equazione parametrica della retta r da essi individuata, verificare che essa appartiene al piano γ di equazione

$$3x + y - z + 1 = 0.$$

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione straordinaria*, 2015, *quesito* 4)

$$\begin{cases} x - 3y + z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3y + t - 5 = 0 \\ x + 2y - t + 3 = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y + 5 - t \\ 3y + 5 - t + 2y - t + 3 = 0 \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ 5y = 2t - 8 \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3\left(\frac{2}{5}t - \frac{8}{5}\right) + 5 - t \\ y = \frac{2}{5}t - \frac{8}{5} \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{6}{5}t - \frac{24}{5} + 5 - t \\ y = \frac{2}{5}t - \frac{8}{5} \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}t + \frac{1}{5} \\ y = \frac{2}{5}t - \frac{8}{5} \\ z = t \end{cases}$$

retta passante per $P\left(\frac{1}{5}, -\frac{8}{5}, 0\right)$

e di direzione $\vec{v} = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$

Se $t = 4$, ho che la retta passa per $P'(1, 0, 4)$

NOTA la direzione della retta è data anche, ad es., da $\vec{v} = (1, 2, 5)$

$$\begin{cases} x = k + \frac{1}{5} \\ y = 2k - \frac{8}{5} \\ z = 5k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = k + 1 \\ y = 2k \\ z = 5k + 4 \end{cases}$$

PARAMETRIZZAZIONI ALTERNATIVE DELLA STESSA RETTA

Per verificare che tale retta appartiene al piano $3x + y - z + 1 = 0$ sostituisco la parametrizzazione

$$3(k+1) + 2k - (5k + 4) + 1 \stackrel{?}{=} 0$$

$$3k + 3 + 2k - 5k - 4 + 1 \stackrel{?}{=} 0$$

$0 = 0$ VERO! Quindi la retta giace sul piano

Alternativamente si può fare la combinazione lineare dei 2 piani:

$$x - 3y + z - 5 + k(x + 2y - z + 3) = 0$$

al variare di k ho tutti i piani
che contengono la retta

$$x - 3y + z - 5 + kx + 2ky - kz + 3k = 0$$

$$(k+1)x + (2k-3)y + (1-k)z + 3k - 5 = 0$$

Esiste k tale che il piano diventi $3x + y - z + 1 = 0$? Sì, infatti

CONDIZIONE DI
COINCIDENZA TRA PIANI

$$\frac{k+1}{3} = \frac{2k-3}{1} = \frac{1-k}{-1} = \frac{3k-5}{1} \Longrightarrow \boxed{k = 2}$$