 YOU & MATHS Six people – Bob, Bobbie, Rob, Robbie, Robert, and Roberta – are to be divided into two study groups. The groups cannot have any person in common, and each group must contain at least one person. In how many ways can this be done?

(USA *Bay Area Math Meet, BAMM, Bowl Sampler*)

[31]

Persone A B C D E F

Tipi di suddivisioni:

A | B C D E F — 6 modi diversi

A B | C D E F — $\binom{6}{2}$ modi diversi (oppure $\binom{6}{4}$)

A B C | D E F — $\frac{1}{2}\binom{6}{3}$ modi diversi

$$6+\binom{6}{2}+\frac{1}{2}\binom{6}{3}=6+\frac{6!}{2\cdot 4!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6!}{3!\,3!}=$$

$$=6+\frac{\cancel{6}^{3}\cdot 5}{\cancel{2}}+\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{3\cdot 2}}=6+15+10=\boxed{31}$$

269 Un comitato di 5 persone deve essere scelto da un gruppo di 9. In quanti modi può essere scelto, se Biff e Jacob devono esservi compresi entrambi o essere entrambi esclusi, e Alice e Jane rifiutano di farne parte insieme?

(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament*)

[41]

BIFF JACOB A B C D E ALICE JANE

1) Contiamo i gruppi con BIFF e JACOB

a) BIFF JACOB A B C $\binom{5}{3}$

(senza ALICE o JANE)

b) BIFF JACOB ALICE A B $\binom{5}{2}$

c) BIFF JACOB JANE A B $\binom{5}{2}$

i gruppi possibili con BIFF e JACOB sono $\binom{5}{3} + 2 \cdot \binom{5}{2}$

2) Contiamo i gruppi senza BIFF e JACOB

a) A B C D E (senza né ALICE né JANE) 1

b) ALICE A B C D $\binom{5}{4} = 5$

c) JANE A B C D $\binom{5}{4} = 5$

i gruppi senza BIFF e JACOB sono $1 + 5 + 5 = 11$

In totale i gruppi sono $\binom{5}{3} + 2 \cdot \binom{5}{2} + 11 = \frac{5!}{3!\,2!} + 2 \cdot \frac{5!}{2!\,3!} + 11 =$

$= \frac{5 \cdot \cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}} + \cancel{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{\cancel{2}} + 11 = 10 + 20 + 11 = \boxed{41}$

PROPRIETÀ DEI COEFFICIENTI BINOMIALI

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n$$

Legge delle classi complementari

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

infatti $n-(n-k)=k$

Formula di Stifel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

DIMOSTRAZIONE

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-(k+1))!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)\,(n-(k+1))!} + \frac{(n-1)!}{k\,(k-1)!\,(n-(k+1))!} =$$

$$= \frac{k\,(n-1)! + (n-k)\,(n-1)!}{\underbrace{k\,(k-1)!}_{k!}\;\underbrace{(n-k)\,(n-(k+1))!}_{(n-k)!}} = \frac{(n-1)!\,[\cancel{k}+n-\cancel{k}]}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots$$

$$\ldots + \binom{n}{n} y^n$$

ESEMPIO

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} x^2 y + \binom{3}{2} x y^2 + \binom{3}{3} y^3 =$$

$$= x^3 + 3x^2 y + 3 x y^2 + y^3$$

$$\begin{array}{ccccccccccl}
 & & & & 1 & & & & & & n=0 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & & n=1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & & n=2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & n=3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & n=4
\end{array}$$

Se voglio $(a+b)^4 =$

$$= a^4 + 4a^3 b + 6 a^2 b^2 + 4 a b^3 + b^4$$