94 **Al microscopio** Un insegnante deve scegliere 5 coppie di studenti tra le 12 femmine e gli 11 maschi della sua classe, ciascuna delle quali utilizzerà un microscopio del laboratorio.

a. In quanti modi l'insegnante può formare le 5 coppie?

b. In quanti modi può scegliere le 5 coppie se ogni coppia deve essere formata da un maschio e da una femmina?

c. In quanti modi i 5 microscopi possono essere assegnati a 5 coppie formate da un maschio e da una femmina?

[a) 1 081 142 370; b) 43 908 480; c) 43 908 480 · 5!]

12 F 11 M $\Rightarrow$ 23 alunni

a) $\binom{23}{2}\cdot\binom{21}{2}\cdot\binom{19}{2}\cdot\binom{17}{2}\cdot\binom{15}{2}\Big/5! =$

$$5!\ \text{volte}\left[\begin{array}{ccccc} AB & DS & CL & MT & WZ \\ DS & CL & AB & WZ & MT \\ \text{----} & & & & \\ CL & AB & MT & WZ & DS \end{array}\right.$$

queste scelte di coppie devono essere equivalenti
$\downarrow$
devo identificare le permutazioni delle coppie

$$= \frac{23\cdot \cancel{22}^{11}}{\cancel{2}}\cdot\frac{21\cdot\cancel{20}^{10}}{\cancel{2}}\cdot\frac{19\cdot\cancel{18}^{9}}{\cancel{2}}\cdot\frac{17\cdot\cancel{16}^{8}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{15}^{3}\cdot\cancel{14}^{7}}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} =$$

$$= 23\cdot 11\cdot 21\cdot 10\cdot 19\cdot 9\cdot 17\cdot 7 = \boxed{1081142370}$$

b) 12 F 11 M

$$\underbrace{12\cdot 11}_{1^a\text{ coppia}}\cdot\underbrace{11\cdot 10}_{2^a\text{ coppia}}\cdot\underbrace{10\cdot 9}_{3^a\text{ coppia}}\cdot\underbrace{9\cdot 8}_{4^a\text{ coppia}}\cdot\underbrace{8\cdot 7}_{5^a\text{ coppia}}\Big/5! =$$

$$= \frac{\cancel{12}\cdot 11^2\cdot 10\cdot\cancel{10}\cdot 9^2\cdot 8^2\cdot 7}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = \boxed{43908480}$$

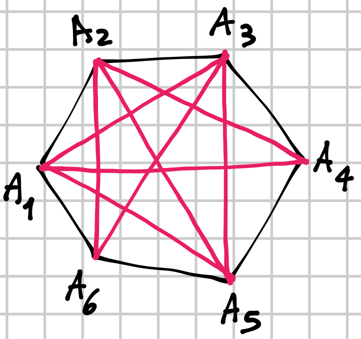
c) Ad ogni "cinquina" di coppie posso assegnare i microscopi in 5! modi:

$$43\,908\,480\cdot 5! = \boxed{5269017600}$$

105 Quante diagonali ha un poligono di 2008 lati?

(Esame di Stato, Liceo scientifico, Scuole italiane all'estero (Americhe), Sessione ordinaria, 2005, quesito 6)

[2013020]



n lati $\Rightarrow$ n vertici

Le diagonali possono essere identificate con le coppie di vertici $(A_3A_6, A_2A_5, \ldots)$ tranne i lati $(A_1A_6, A_2A_3, \ldots)$

$n = 6$

$\Downarrow$

$$\binom{6}{2} - 6 = \frac{6!}{2!\,4!} - 6 = \frac{\cancel{6}^{\,3} \cdot 5}{\cancel{2}} - 6 = 9$$

$$\binom{n}{2} - n$$

numero di TUTTE le coppie di vertici (compresi i lati)

numero di lati

$$n = 2008 \Rightarrow \binom{2008}{2} - 2008 = \frac{2008!}{2!\,2006!} - 2008 = \frac{\cancel{2008}^{\,1004} \cdot 2007 \cdot \cancel{2006!}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2006!}} - 2008 =$$

$$= 1004 \cdot 2007 - 2008 = \boxed{2013020}$$

86 Dato l'insieme $A = \{a, e, l, o, m, r, t\}$, calcola quante parole, anche prive di significato, si possono scrivere:

a. con quattro lettere diverse;

b. con quattro lettere diverse nelle quali la prima sia r e l'ultima a;

c. con sette lettere diverse;

d. con otto lettere supponendo che la lettera m si possa ripetere due volte.

[a) 840; b) 20; c) 5040; d) 20 160]

a) $D_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \boxed{840}$

b) R _ _ A $\quad D_{5,2} = 5 \cdot 4 = \boxed{20}$

c) $P_7 = 7! = \boxed{5040}$

d) Anagrammi di A E L O M R T M

$P_8^{(2)} = \frac{8!}{2!} = \boxed{20160}$

Verificare l'identità

153 $$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k+1} = \frac{n-k+1}{n+1}\binom{n+2}{k+1}$$

$$\underbrace{\frac{1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}}_{(k+1)!} + \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n-k+1}{n+1} \frac{(n+2)!}{(k+1)!\,(n-k+1)!}$$

$$\frac{n! + (n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{\cancel{n-k+1}}{\cancel{n+1}} \frac{(n+2)\cancel{(n+1)}n!}{(k+1)!\,\cancel{(n-k+1)}(n-k)!}$$

$$\frac{n! + (n+1)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+2)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$\frac{n!\overbrace{(1+n+1)}^{n+2}}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+2)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

ok!

169 $\binom{x+1}{4} - \frac{3}{2} \cdot \binom{x-1}{3} = \binom{x}{3}$ [6]

C.E. $\begin{cases} x+1 \geq 4 \\ x-1 \geq 3 \\ x \geq 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 4 \\ x \geq 3 \end{cases}$

$\Downarrow$

C.E. $x \geq 4$

$x \in \mathbb{N}$

$$\frac{(x+1)!}{4!\,(x-3)!} - \frac{3}{2}\,\frac{(x-1)!}{3!\,(x-4)!} = \frac{x!}{3!\,(x-3)!}$$

$$\frac{(x+1)\,x\,(x-1)(x-2)\cancel{(x-3)!}}{4\cdot 3\cdot 2\cdot \cancel{(x-3)!}} - \frac{3}{2}\,\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\cancel{(x-4)!}}{3\cdot 2\cdot \cancel{(x-4)!}} = \frac{x(x-1)(x-2)}{3\cdot 2}$$

$$\frac{(x+1)\,x\,\cancel{(x-1)}\,\cancel{(x-2)}}{4\cdot \cancel{3\cdot 2}} - \frac{3\cancel{(x-1)}\,\cancel{(x-2)}(x-3)}{2\cdot \cancel{3\cdot 2}} = \frac{x\,\cancel{(x-1)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{3\cdot 2}}$$

$$\frac{(x+1)\,x}{4} - \frac{3(x-3)}{2} = x$$

$$x^2 + x - 6(x-3) = 4x$$

$$x^2 + x - 6x + 18 - 4x = 0$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0 \qquad (x-3)(x-6) = 0$$

$\nearrow$ $x = 3$ N.ACC. per C.E.

$\searrow$ $\boxed{x = 6}$