**74** Una popolazione è formata da 20 persone: 7 hanno età inferiore a 18 anni, 3 età superiore a 60 anni e 10 hanno un'età intermedia. Si devono formare dei gruppi di 6 persone.
Calcola quanti sono i gruppi:

**a.** nei quali le persone hanno tutte la stessa età;

**b.** nei quali sono presenti due persone per ogni fascia di età;

**c.** nei quali sono presenti tutte e 3 le persone con età superiore a 60 anni;

**d.** che non contengono persone con età inferiore a 18 anni.

[a) 217; b) 2835; c) 680; d) 1716]

a) $\underbrace{\binom{7}{6}}_{\text{gruppi con età} < 18} + \underbrace{\binom{10}{6}}_{\text{gruppi con età intermedia}} = 7 + \frac{10!}{6!\,4!} = 7 + \frac{10\cdot\cancel{9}^{3}\cdot\cancel{8}\cdot 7}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = \boxed{217}$

b) $\binom{7}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{10}{2} = \frac{7!}{2!\,5!}\cdot 3\cdot\frac{10!}{2!\,8!} = \frac{7\cdot\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}}\cdot 3\cdot\frac{\cancel{10}^{5}\cdot 9}{\cancel{2}} = \boxed{2835}$

c) $\underbrace{\binom{3}{3}}_{1}\cdot\binom{17}{3} = \frac{17!}{3!\,14!} = \frac{17\cdot\cancel{16}^{8}\cdot\cancel{15}^{5}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = \boxed{680}$

1 → gruppo di 3 persone > 60

d) $\binom{13}{6} = \frac{13!}{6!\,7!} = \frac{13\cdot\cancel{12}^{2}\cdot 11\cdot\cancel{10}^{2}\cdot\cancel{9}^{3}\cdot\cancel{8}}{\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 13\cdot 2\cdot 11\cdot 2\cdot 3 = \boxed{1716}$

Verificare l'identità:

**154** $$\binom{n+1}{k}\cdot\frac{k}{n-k+2} = \binom{n+1}{k-1}$$

$$\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}\cdot\frac{k}{n-k+2} = \frac{(n+1)!}{(k-1)!\,(n-k+2)!}$$

$$\frac{(n+1)!\cdot\cancel{k}}{\cancel{k}(k-1)!\,\underbrace{(n-k+2)(n-k+1)!}_{(n-k+2)!}} = \frac{(n+1)!}{(k-1)!\,(n-k+2)!}$$

ok!

**168** $3 \cdot \binom{x}{2} - \binom{x}{x-3} = \binom{x+1}{3}$ [5]

C.E. $x \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq x-3 \quad \forall x \\ x+1 \geq 3 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x \geq 3 \, , x \in \mathbb{N}}$$

$$3 \frac{x!}{2(x-2)!} - \frac{x!}{(x-3)!\,3!} = \frac{(x+1)!}{3!\,(x-2)!}$$

$$3 \frac{x(x-1)\cancel{(x-2)!}}{2\cancel{(x-2)!}} - \frac{x(x-1)(x-2)\cancel{(x-3)!}}{\cancel{(x-3)!}\,3\cdot 2} =$$

$$= \frac{(x+1)x(x-1)\cancel{(x-2)!}}{3\cdot 2\cdot \cancel{(x-2)!}}$$

$$\frac{3\cancel{x}\cancel{(x-1)}}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{x}\cancel{(x-1)}(x-2)}{3\cdot \cancel{2}} = \frac{\cancel{x}(x+1)\cancel{(x-1)}}{3\cdot \cancel{2}}$$

$$3 - \frac{x-2}{3} = \frac{x+1}{3}$$

$$9 - x + 2 = x + 1$$

$$2x = 10 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

**113** Quanti sono i numeri di 6 cifre che contengono: 2 volte esatte la cifra 1, 2 volte esatte la cifra 2 e non contengono la cifra 0?

*(Esame di Stato, Liceo scientifico, Scuole italiane all'estero (Europa), Sessione ordinaria, 2012, quesito 8)*

[4410]

$\underline{1}\ \underline{1}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{5}\ \underline{7}$ → CIFRE 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

1) Scelgo le altre 2 cifre oltre 1 e 2

→ faccio gli anagrammi

a) cifre diverse → $\binom{7}{2}$ scelte ⟹ 1 1 2 2 5 7 $\binom{7}{2} P_6^{(2,2)}$

b) cifre uguali → 7 scelte ⟹ 1 1 2 2 3 3 $7 \cdot P_6^{(2,2,2)}$

$$\binom{7}{2}\cdot\frac{6!}{2!\,2!}+7\cdot\frac{6!}{2!\,2!\,2!}=\frac{7!}{2\cdot 5!}\cdot\frac{6!}{2\cdot 2}+7\cdot\frac{6!}{2\cdot 2\cdot 2}=$$

$$=\frac{7\cdot 6}{\cancel{2}}\cdot\frac{6\cdot 5\cdot\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}}+7\cdot\frac{6\cdot 5\cdot\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}}=$$

$$=7\cdot 6\cdot 6\cdot 5\cdot 3+7\cdot 6\cdot 5\cdot 3=\boxed{4410}$$

**42** $(\underbrace{2x}_{A}+\underbrace{1}_{B})^5$ Sviluppare la potenza

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
$\boxed{1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1}$

$$(A+B)^5=A^5+5A^4B+10A^3B^2+10A^2B^3+5AB^4+B^5$$

$$(2x+1)^5=(2x)^5+5(2x)^4\cdot 1+10(2x)^3\cdot 1^2+10(2x)^2\cdot 1^3+5(2x)\cdot 1^4+1^5=$$

$$=32x^5+80x^4+80x^3+40x^2+10x+1$$

**255** Una scatola contiene 20 pile, di cui 3 scariche. Scegliendo a caso 4 pile, quante sono le scelte possibili che contengono almeno una pila scarica? [2465]

PILE ● ● ● ○ . . . . . . ○ ○ ○

1 2 3 18 19 20

SCELTE CON 1 PILA SCARICA $\underbrace{3}_{\substack{\text{3 scelte}\\\text{della pila}\\\text{scarica } \binom{3}{1}}} \cdot \underbrace{\binom{17}{3}}_{\substack{\text{scelte}\\\text{delle altre 3}\\\text{fra le non scariche}}}$

SCELTE CON 2 PILE SCARICHE $\binom{3}{2}\cdot\binom{17}{2}$

SCELTE CON 3 PILE SCARICHE $\underbrace{1}_{\binom{3}{3}}\cdot\binom{17}{1}$

$$3\cdot\binom{17}{3}+\binom{3}{2}\binom{17}{2}+17=3\cdot\frac{17!}{3!\,14!}+3\cdot\frac{17!}{2!\,15!}+17=$$

$$=\cancel{3}\cdot\frac{17\cdot\overset{8}{\cancel{16}}\cdot15}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}+3\cdot\frac{17\cdot\overset{8}{\cancel{16}}}{\cancel{2}}+17=\boxed{2465}$$