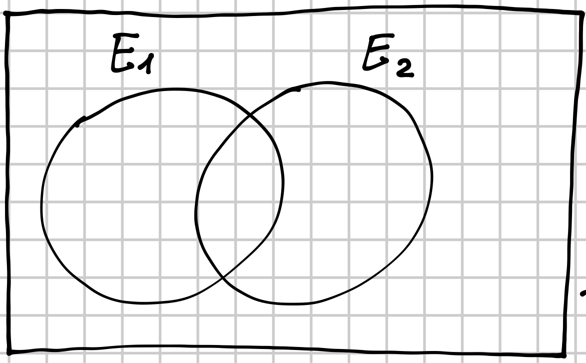
PROBABILITÀ CONDIZIONATA



Ω = spazio dei casi elementari con $P(E_1) \neq 0$

$P(E_2 | E_1)$ = probabilità che si verifichi E_2 nell'ipotesi che E_1 si sia verificato

Se E_1 si è verificato, lo spazio dei casi possibili si "restringe" a E_1

$$P(E_2|E_1) = \frac{\text{CASI FAVOREVOLI}}{\text{CASI POSSIBILI}} = \frac{|E_1 \cap E_2|}{|E_1|} =$$

$$= \frac{\frac{|E_2 \cap E_1|}{|\Omega|}}{\frac{|E_1|}{|\Omega|}} = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)}$$

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)} \qquad (\text{con } P(E_1) \neq 0)$$

ESEMPIO

Nel lancio di un dado qual è la probabilità di ottenere un numero pari sapendo che è uscito un numero primo.

E_1 = "esce un primo" $\quad E_2$ = "esce un pari" $\quad E_1 \cap E_2$ = "esce un primo pari"

$P(E_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)} \Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1)$$

Se 2 eventi E_1, E_2 sono STOCASTICAMENTE INDIPENDENTI, allora

$$P(E_1|E_2) = P(E_1) \quad \text{e anche} \quad P(E_2|E_1) = P(E_2)$$

Quindi, se 2 eventi E_1, E_2 sono STOC. INDIPENDENTI, si ha

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

107 Si estraggono consecutivamente tre palline da un'urna contenente 20 palline numerate da 1 a 20, rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna. Calcola la probabilità che le tre palline abbiano un numero dispari, sapendo che le prime due palline hanno un numero dispari. $\left[\frac{1}{2}\right]$

E_1 = "2 numeri dispari nelle prime 2 estrazioni"

E_2 = "3 numeri dispari nelle 3 estrazioni"

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8} \cdot 4 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$P(E_1) = \frac{|E_1|}{|\Omega|} = \frac{10^2}{20^2} = \frac{1}{4}$$

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2) = \frac{10^3}{20^3} = \frac{1}{8}$$

118 Un'urna A contiene 3 palline rosse, 2 bianche e 5 nere, mentre un'urna B contiene 6 palline bianche e 10 nere.
Estrai una pallina da A e una da B e calcola la probabilità che:

a. siano entrambe nere;

b. siano una rossa e una bianca;

c. non siano entrambe bianche.

$\left[\text{a) } \frac{5}{16}; \text{ b) } \frac{9}{80}; \text{ c) } \frac{37}{40}\right]$

A			B	
3 R	2 B	5 N	6 B	10 N

a) E = "entrambe nere" $\quad E_A$ = "esce N da A" $\quad E_B$ = "esce N da B"

$$P(E) = P(E_A \cap E_B) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{INDIPENDENTI}}}{P(E_A) \cdot P(E_B)} = \frac{5}{10} \cdot \frac{10}{16} = \frac{5}{16}$$

b) E_A = "esce R da A" $\quad E_B$ = "esce B da B"

$$P(E) = P(E_A \cap E_B) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{INDIPENDENTI}}}{P(E_A) \cdot P(E_B)} = \frac{3}{10} \cdot \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{16}_{8}} = \frac{9}{80}$$

c) E = "non siano entrambe B" $\quad \bar{E}$ = "siano entrambe B"

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \underbrace{\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{10}_{5}}}_{\text{BIANCA dalla 1ª urna}} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{16}_{8}}}_{\text{BIANCA dalla 2ª urna}} = 1 - \frac{3}{40} = \frac{37}{40}$$