PROVE RIPETUTE

n PROVE RIPETUTE

p = probabilità successo (in 1 prova)

q = probabilità di non successo (in 1 prova) $= 1 - p$

PROBLEMA: qual è la probabilità, in n prove, di ottenere esattamente K successi ($K \leq n$)

ESEMPIO

Qual è la probabilità, in 7 lanci di un dado, di ottenere 5 esattamente 3 volte?

$p = \frac{1}{6}$ (prob. di un successo) $\qquad q = \frac{5}{6}$ (prob. di un insuccesso)

LANCI =	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
	□	□	☒	□	☒	☒	□
	□	☒	□	☒	□	□	☒
	....						

□ insuccesso

☒ successo

tutti i lanci sono indipendenti

Se voglio calcolare la probabilità di una qualsiasi di queste serie di 7 lanci, in cui 5 è uscito 3 volte

□ □ ☒ □ ☒ ☒ □

$$q \cdot q \cdot p \cdot q \cdot p \cdot p \cdot q = p^3 q^4$$

e questo vale per tutte le serie di lanci in queste condizioni

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Ma quante sono queste serie di lanci (in cui 5 è uscito 3 volte)?

Tante quante gli anagrammi di una parola di 7 lettere con 3 e 4 ripetute: $\frac{7!}{3!\,4!} = \binom{7}{3}$

In definitiva, la probabilità cercata è la <u>somma</u> delle probabilità di ciascuna serie:

$$P(\text{esce il 5 per 3 volte in 7 lanci}) =$$

$$= \binom{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

In generale, la probabilità di avere K successi su n prove è:

$$\boxed{P = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

153 Si lancia 10 volte una moneta. Calcola la probabilità che:

a. esca testa 4 volte;

b. esca croce 6 volte;

c. esca sempre croce;

d. almeno una volta esca testa.

$$\left[\text{a) } \frac{210}{2^{10}}\text{; b) } \frac{210}{2^{10}}\text{; c) } \frac{1}{2^{10}}\text{; d) } \frac{2^{10}-1}{2^{10}}\right]$$

$p = \frac{1}{2} \qquad q = \frac{1}{2}$

a) $P_{(10,4)} = \binom{10}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-4} = \binom{10}{4}\frac{1}{2^{10}} = (*)$

prob. che in 10 lanci esca T 4 volte $\qquad n = 10 \quad K = 4$

$p = \frac{1}{2} \qquad q = 1 - p = \frac{1}{2}$

prob. T $\qquad$ prob. C

$$(*) = \frac{10!}{4!\,6!}\,\frac{1}{2^{10}} = \frac{\cancel{10}\cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{6!}} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{210}{2^{10}}$$

b) $P_{(10,6)} = \binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \ldots = \frac{210}{2^{10}}$

c) C C C C C C C C C C $\leftarrow$ 10 lanci tutti C

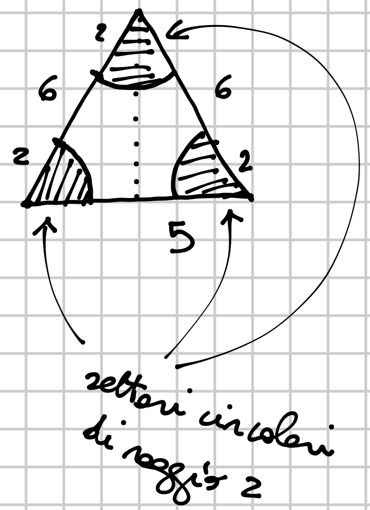
$$P_{(10,10)} = \binom{10}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-10} = \frac{1}{2^{10}}$$

d) "Almeno una T" = E $\qquad \bar{E}$ = "tutte C"

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{2^{10}-1}{2^{10}}$$

49 I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo? (*Esame di Stato, Liceo scientifico, PNI, Sessione ordinaria*, 2015, *quesito* 8)

[54%]



Prendere un punto che disti più di 2cm da ciascun vertice significa prendere un punto della zona bianca

$$P(E) = \frac{\text{Area della zona bianca}}{\text{Area del triangolo}} =$$

$$= \frac{\text{Area triangolo} - \text{Area settori}}{\text{Area del triangolo}} = (*)$$

$$\text{Area triangolo} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{6^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2}$$

BASE

ALTEZZA (TH. PITAGORA)

Area dei 3 settori =  = area di un semicerchio di raggio 2

$$= \frac{\pi\, 2^2}{2} = 2\pi$$

$$(*) = 1 - \frac{\text{Area settori}}{\text{Area triangolo}} = 1 - \frac{2\pi}{\frac{5}{2}\sqrt{36 - \frac{25}{4}}} = 0{,}5392\ldots \simeq 0{,}54 = 54\%$$