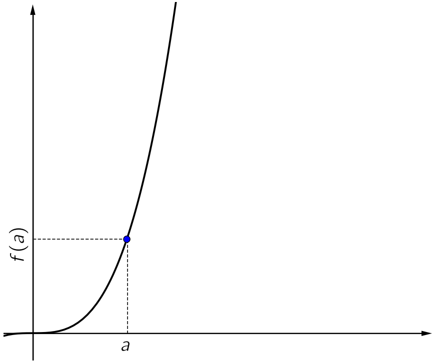
Derivate e integrali

Uno sguardo intuitivo

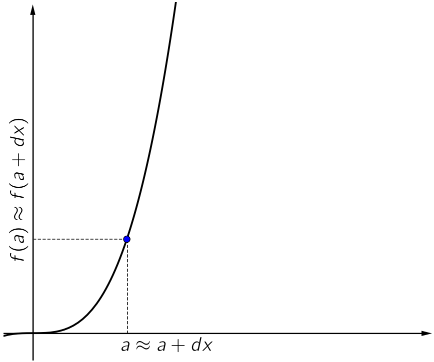
Riccardo Dossena

Liceo Scientifico "G. Novello" - Codogno (LO)

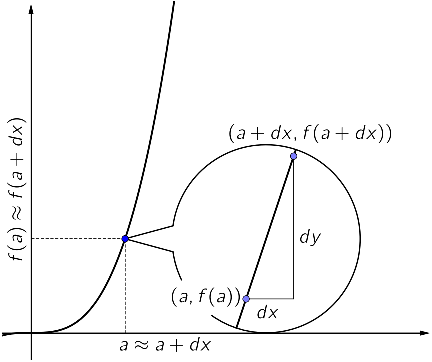
9 dicembre 2022



- $y = f(x)$ derivabile in a

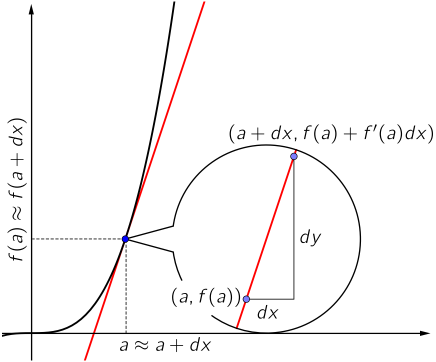


- $y = f(x)$ derivabile in a
- dx incremento infinitesimo di x (differenziale di x)



- $y = f(x)$ derivabile in a
- dx incremento infinitesimo di x (differenziale di x)
- dy corrispondente incremento di y (differenziale di y)

$$\boxed{dy = f(a+dx) - f(a)}$$



- $y = f(x)$ derivabile in a
- dx incremento infinitesimo di x (differenziale di x)
- dy corrispondente incremento di y (differenziale di y)

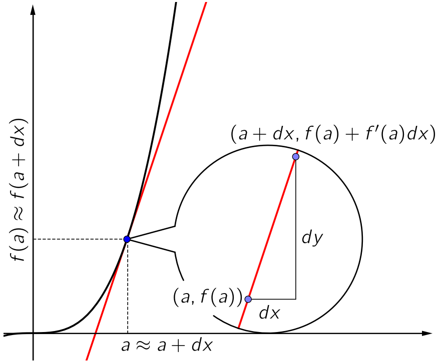
$$\boxed{dy = f(a+dx) - f(a)}$$

- l'incremento lungo la tangente è

$$f'(a)dx$$

che è indistinguibile da dy

$$\boxed{dy \simeq f'(a)dx}$$



- $y = f(x)$ derivabile in a
- dx incremento infinitesimo di x (differenziale di x)
- dy corrispondente incremento di y (differenziale di y)

$$\boxed{dy = f(a+dx) - f(a)}$$

- l'incremento lungo la tangente è

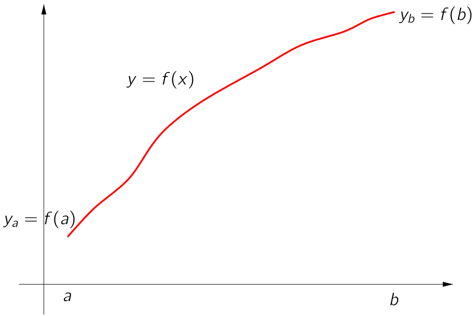
$$f'(a)dx$$

che è indistinguibile da dy

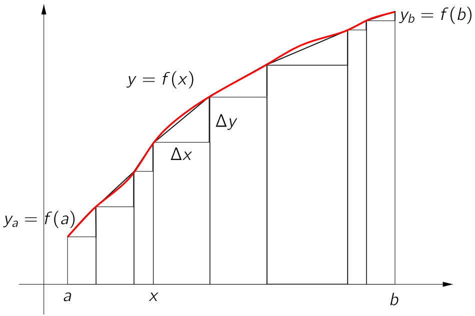
$$\boxed{dy \simeq f'(a)dx}$$

e possiamo allora scrivere

$$\boxed{\frac{dy}{dx} \simeq f'(a)}$$

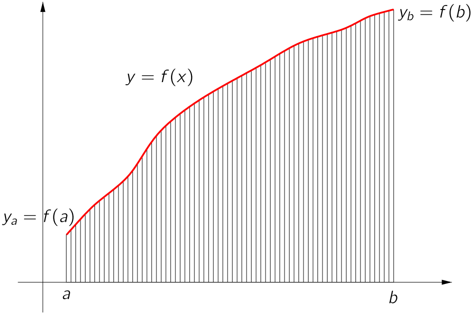


Data una funzione $y = f(x)$, se consideriamo incrementi qualsiasi Δx (non infinitesimi) della variabile indipendente x, posto $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ (incremento della variabile dipendente y), abbiamo che

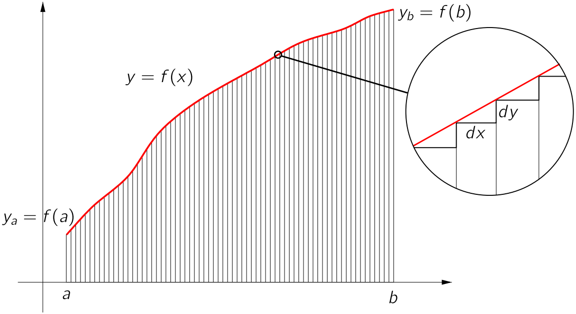


Data una funzione $y = f(x)$, se consideriamo incrementi qualsiasi Δx (non infinitesimi) della variabile indipendente x, posto $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ (incremento della variabile dipendente y), abbiamo che

$$f(b) - f(a) = \sum \Delta y$$

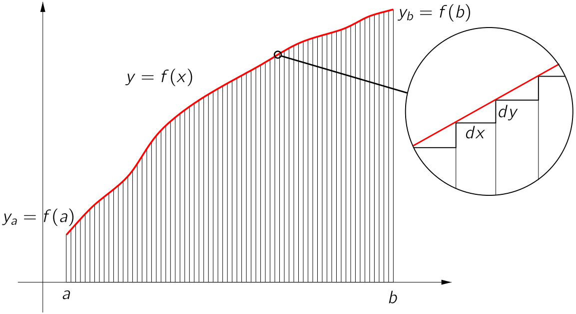


se invece suddividiamo in modo più fitto, mediante intervallini infinitesimi dx,



se invece suddividiamo in modo più fitto, mediante intervallini infinitesimi dx, possiamo scrivere (ponendo $y_a = f(a)$ e $y_b = f(b)$)

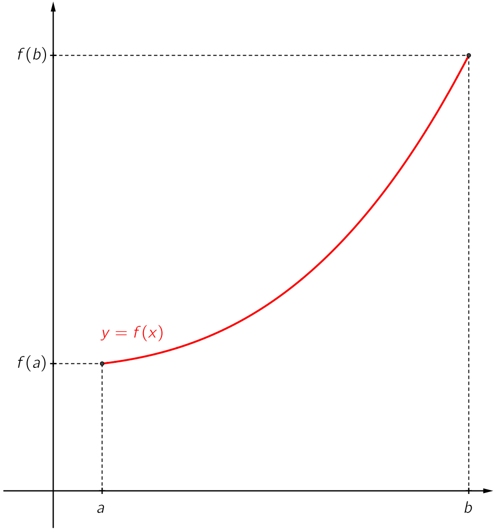
$$dy \simeq f'(x)dx \qquad \Rightarrow \qquad f(b) - f(a) = \int_{y_a}^{y_b} dy \simeq \int_a^b f'(x)\, dx$$



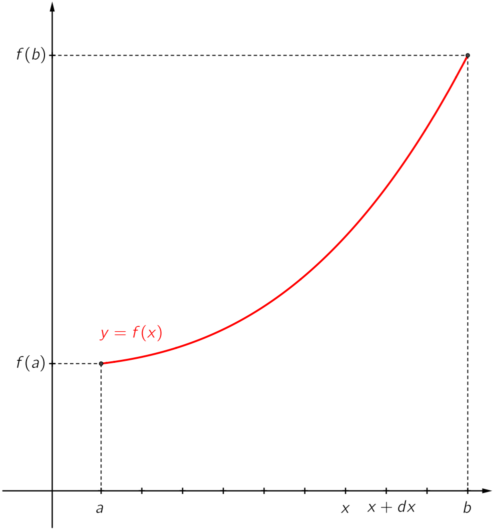
se invece suddividiamo in modo più fitto, mediante intervallini infinitesimi dx, possiamo scrivere (ponendo $y_a = f(a)$ e $y_b = f(b)$)

$$dy \simeq f'(x)dx \qquad \Rightarrow \qquad f(b) - f(a) = \int_{y_a}^{y_b} dy \simeq \int_a^b f'(x)\, dx$$

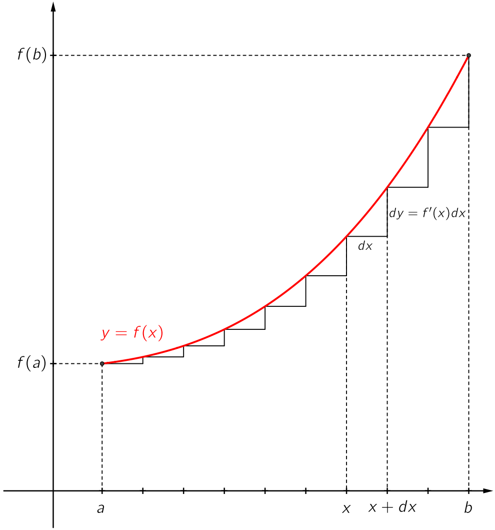
D'ora in avanti scriveremo sempre l'*uguaglianza* $=$ al posto dell'*indistinguibilità* $\simeq$ e non faremo più distinzione fra Δx e dx e fra Δy e dy, i quali saranno sempre infinitesimi



- Consideriamo una funzione derivabile $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ il cui grafico è $y = f(x)$



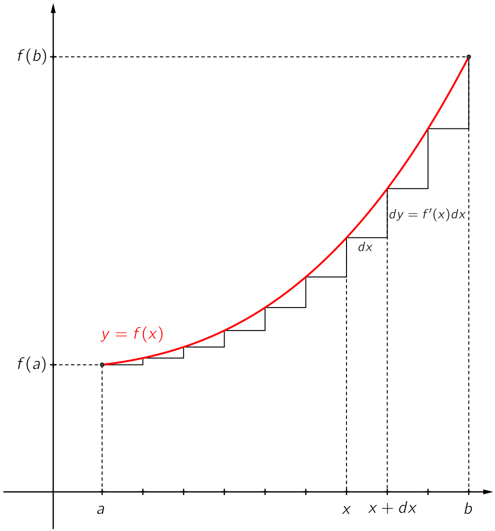
- Consideriamo una funzione derivabile $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ il cui grafico è $y = f(x)$
- suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in intervallini infinitesimi dx



- Consideriamo una funzione derivabile $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ il cui grafico è $y = f(x)$
- suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in intervallini infinitesimi dx
- se $dy = f'(x)dx$ rappresenta il generico incremento infinitesimo della y, la somma di tali incrementi ricostituirà tutta la funzione

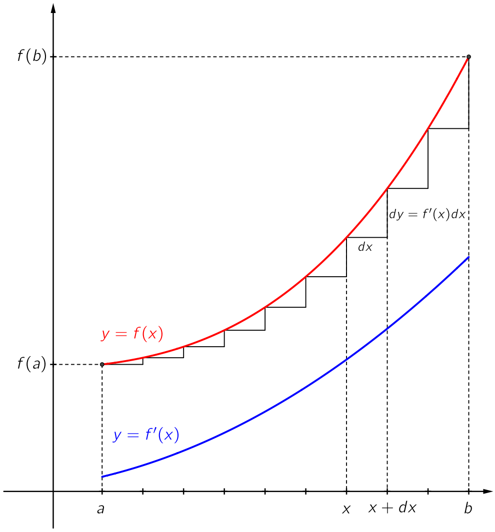
$$y = \int dy = \int f'(x)dx$$

o, in modo più preciso...



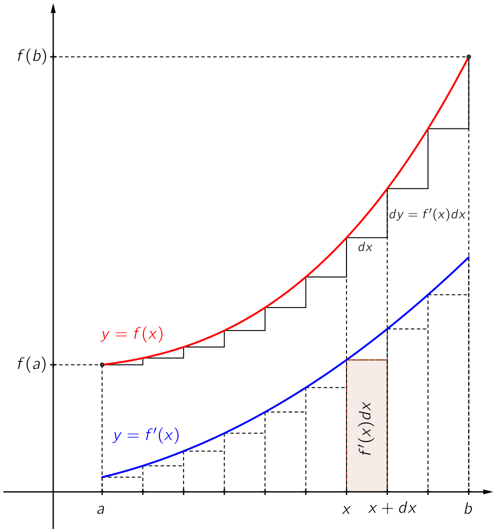
- Consideriamo una funzione derivabile $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ il cui grafico è $y = f(x)$
- suddividiamo l'intervallo $[a,b]$ in intervallini infinitesimi dx
- se $dy = f'(x)dx$ rappresenta il generico incremento infinitesimo della y, la somma di tali incrementi ricostituirà tutta la funzione

$$\int_{y_a}^{y_b} dy = \int_a^b f'(x)\,dx$$
$$= f(b) - f(a)$$



- consideriamo ora la derivata $y = f'(x)$ e chiediamoci quale altro significato geometrico assumono $dy = f'(x)dx$ e la somma

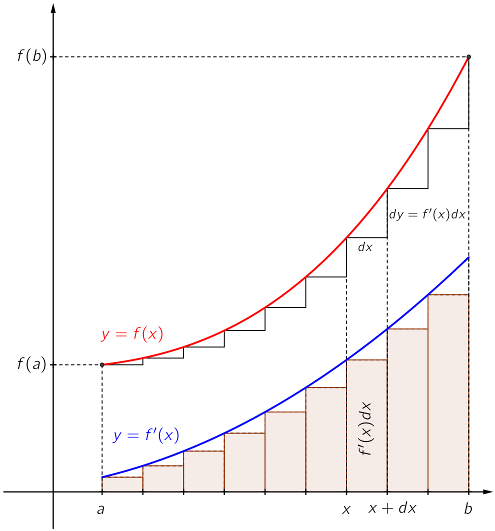
$$\int_{y_a}^{y_b} dy = \int_a^b f'(x)dx$$



- consideriamo ora la derivata $y = f'(x)$ e chiediamoci quale altro significato geometrico assumono $dy = f'(x)dx$ e la somma

$$\int_{y_a}^{y_b} dy = \int_a^b f'(x)dx$$

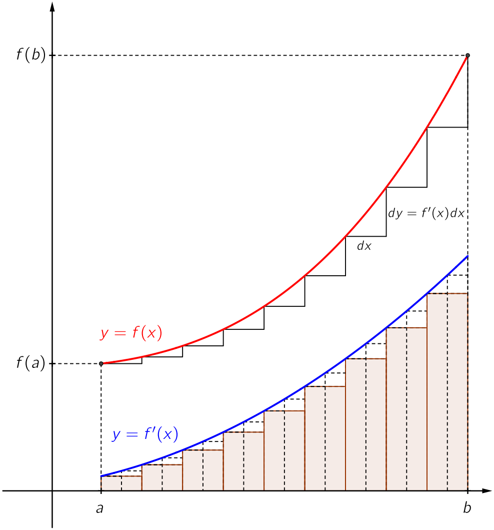
- $f'(x)dx$ è l'area del rettangolo di base dx e altezza $f'(x)$, dunque l'area della regione sotto il grafico di $y = f'(x)$ tra x e $x + dx$, a parte il "triangolino" bianco superiore che tende a sparire se dx è infinitesimo



- la somma di tutti i dy

$$\int_{y_a}^{y_b} dy = \int_a^b f'(x)dx$$

sarà allora l'area della regione di piano compresa tra il grafico di $y = f'(x)$ e l'asse x, tra a e b

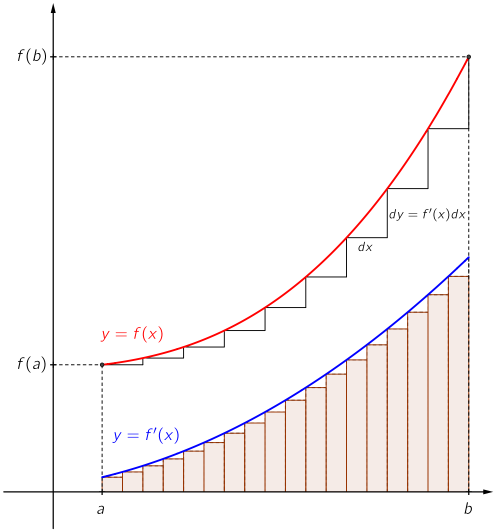


- la somma di tutti i dy

$$\int_{y_a}^{y_b} dy = \int_a^b f'(x)dx$$

sarà allora l'area della regione di piano compresa tra il grafico di $y = f'(x)$ e l'asse x, tra a e b

- la cosa è ancora più evidente se prendiamo intervallini dx ancora più piccoli

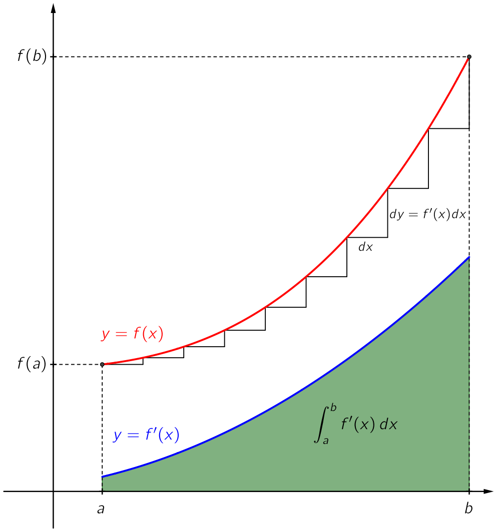


- la somma di tutti i dy

$$\int_{y_a}^{y_b} dy = \int_a^b f'(x)dx$$

sarà allora l'area della regione di piano compresa tra il grafico di $y = f'(x)$ e l'asse x, tra a e b

- la cosa è ancora più evidente se prendiamo intervallini dx ancora più piccoli
- come si vede, il "triangolino" bianco superiore si fa sempre più piccolo. . .

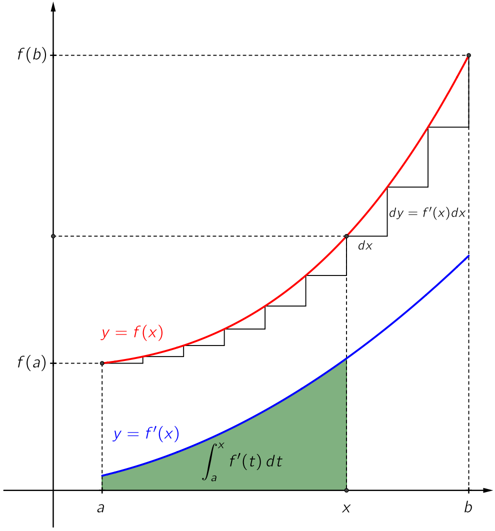


- la somma di tutti i dy

$$\int_{y_a}^{y_b} dy = \int_a^b f'(x)dx$$

sarà allora l'area della regione di piano compresa tra il grafico di $y = f'(x)$ e l'asse x, tra a e b

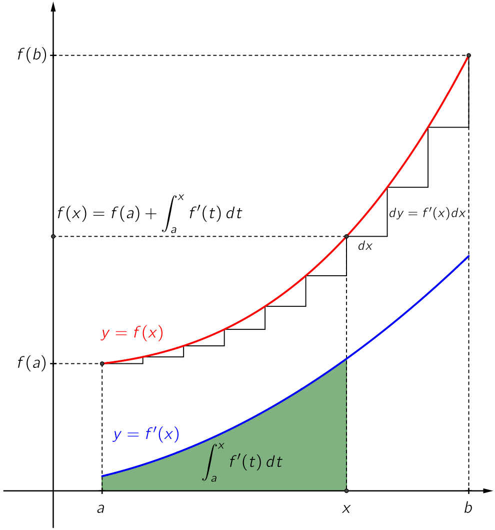
- la cosa è ancora più evidente se prendiamo intervallini dx ancora più piccoli
- come si vede, il "triangolino" bianco superiore si fa sempre più piccolo...
- ... finché scompare del tutto



- se anziché tutto $[a, b]$ consideriamo $[a, x]$, la somma

$$\int_a^x f'(t)\,dt$$

rappresenta l'area della regione tra a e x

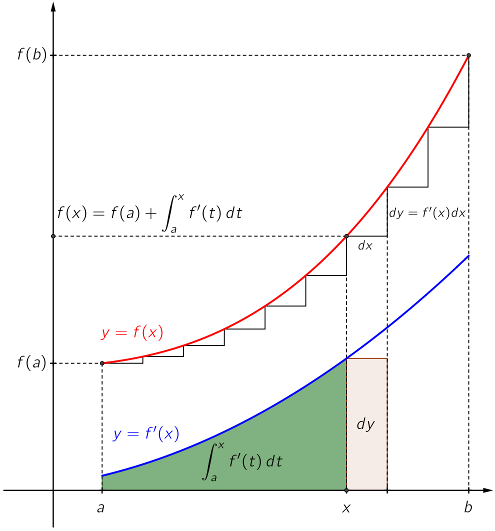


- se anziché tutto $[a, b]$ consideriamo $[a, x]$, la somma

$$\int_a^x f'(t)\,dt$$

  rappresenta l'area della regione tra a e x
- quest'area sommata a $f(a)$ fornisce il valore di $f(x)$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$



- se anziché tutto $[a, b]$ consideriamo $[a, x]$, la somma

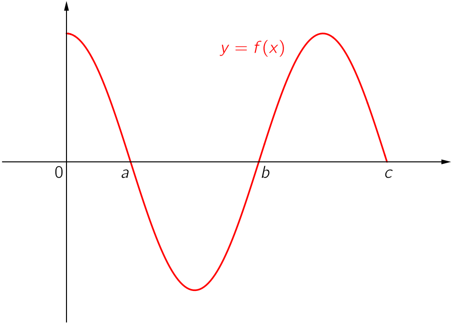
$$\int_a^x f'(t)\,dt$$

rappresenta l'area della regione tra a e x

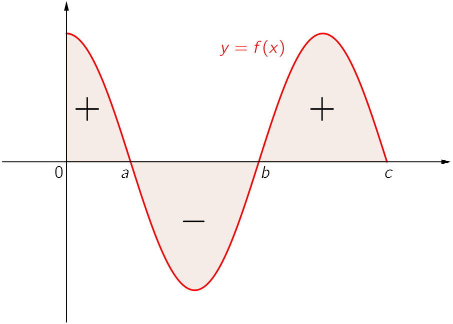
- quest'area sommata a $f(a)$ fornisce il valore di $f(x)$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

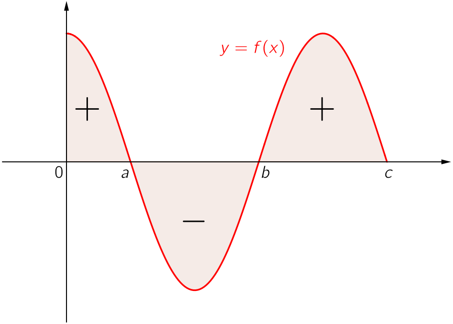
- infatti gli incrementi dy rappresentano proprio l'area della regione tra x e $x + dx$ (dx infinitesimo, per cui il triangolo bianco scompare)



Dunque l'integrale rappresenta un'area, ma attenzione: negli intervalli in cui f è negativa, l'area deve essere preceduta dal segno meno!

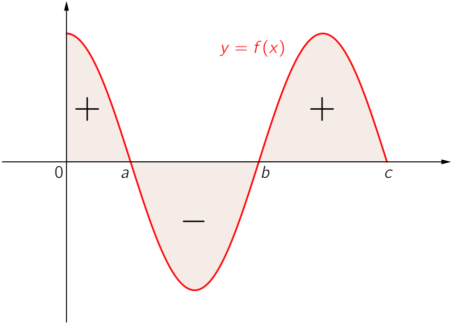


Dunque l'integrale rappresenta un'area, ma attenzione: negli intervalli in cui f è negativa, l'area deve essere preceduta dal segno meno!



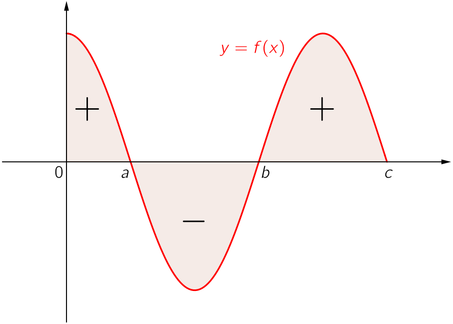
Dunque l'integrale rappresenta un'area, ma attenzione: negli intervalli in cui f è negativa, l'area deve essere preceduta dal segno meno!

$$\int_0^a f(x)\, dx > 0$$



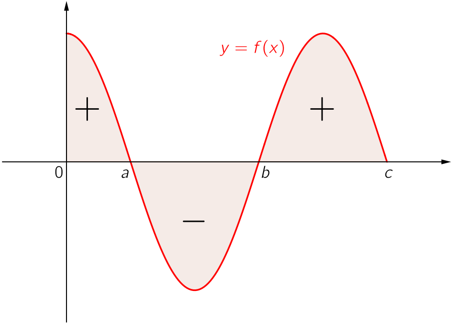
Dunque l'integrale rappresenta un'area, ma attenzione: negli intervalli in cui f è negativa, l'area deve essere preceduta dal segno meno!

$$\int_0^a f(x)\,dx > 0 \qquad \int_a^b f(x)\,dx < 0$$



Dunque l'integrale rappresenta un'area, ma attenzione: negli intervalli in cui f è negativa, l'area deve essere preceduta dal segno meno!

$$\int_0^a f(x)\,dx > 0 \qquad \int_a^b f(x)\,dx < 0 \qquad \int_b^c f(x)\,dx > 0$$



Dunque l'integrale rappresenta un'area, ma attenzione: negli intervalli in cui f è negativa, l'area deve essere preceduta dal segno meno!
Inoltre si ha

$$\int_0^c f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Dall'uguaglianza

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

Dall'uguaglianza

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

derivando entrambi i membri

$$f'(x) = \left(\int_a^x f'(t)\,dt\right)'$$

Dall'uguaglianza

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

derivando entrambi i membri

$$f'(x) = \left(\int_a^x f'(t)\,dt\right)'$$

Primo teorema fondamentale del calcolo

Siano I un intervallo, $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $a \in I$. Consideriamo la funzione integrale

$$F\colon I \to \mathbb{R} \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

allora F è una primitiva di f, cioè F è derivabile in I e

$$\forall x \in I \qquad F'(x) = f(x)$$

Vale l'uguaglianza

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)$$

in cui dobbiamo considerare f' continua, per cui f deve essere derivabile con derivata continua

Vale l'uguaglianza

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

in cui dobbiamo considerare f' continua, per cui f deve essere derivabile con derivata continua

Equivalentemente, partendo da una generica funzione f continua (anziché da una derivata) si ha

Secondo teorema fondamentale del calcolo

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e F una qualsiasi primitiva di f in $[a, b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Un'osservazione sulle notazioni differenziali

Il differenziale di una variabile indipendente x si indica con dx

Un'osservazione sulle notazioni differenziali

Il differenziale di una variabile indipendente x si indica con dx

Il differenziale di una variabile dipendente $y = f(x)$ si indica con dy

Un'osservazione sulle notazioni differenziali

Il differenziale di una variabile indipendente x si indica con dx

Il differenziale di una variabile dipendente $y = f(x)$ si indica con dy

La notazione $\int_\alpha^\beta dt$ significa sempre $\beta - \alpha$, sia con t variabile indipendente che dipendente:

Un'osservazione sulle notazioni differenziali

Il differenziale di una variabile indipendente x si indica con dx

Il differenziale di una variabile dipendente $y = f(x)$ si indica con dy

La notazione $\int_\alpha^\beta dt$ significa sempre $\beta - \alpha$, sia con t variabile indipendente che dipendente:

- se x è variabile indipendente

$$\int_a^b dx = b - a$$

Un'osservazione sulle notazioni differenziali

Il differenziale di una variabile indipendente x si indica con dx

Il differenziale di una variabile dipendente $y = f(x)$ si indica con dy

La notazione $\int_\alpha^\beta dt$ significa sempre $\beta - \alpha$, sia con t variabile indipendente che dipendente:

- se x è variabile indipendente

$$\int_a^b dx = b - a$$

- se y è variabile dipendente $y = f(x)$

$$\int_{f(a)}^{f(b)} dy = f(b) - f(a) \quad \left(= \int_a^b f'(x)\, dx = \int_{y_a}^{y_b} dy \right)$$