36 ◆◆◆

ORA PROVA TU In un acceleratore, una particella elementare viaggia a una velocità relativistica tale da «allungare» la sua vita media del 30%.

▶ Calcola di quanto deve aumentare, in percentuale, la velocità della particella affinché l'allungamento della sua vita media sia del 60% anziché del 30%. [22%]

Δt = tempo proprio della particella

$\Delta t'$ = tempo dilatato del laboratorio

$$\Delta t'_{(1)} = \underbrace{1{,}30}_{\gamma^{(1)}} \Delta t \qquad \gamma^{(1)} \rightarrow v^{(1)}$$

$$\Delta t'_{(2)} = \underbrace{1{,}60}_{\gamma^{(2)}} \Delta t \qquad \gamma^{(2)} \rightarrow v^{(2)}$$

$$\gamma^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^{(1)2}}{c^2}}}$$

$$\Downarrow$$

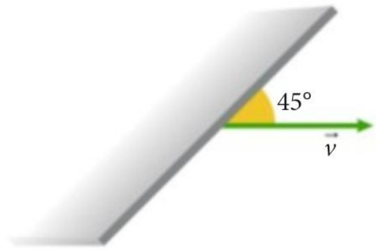
$$\gamma^{(1)2} = \frac{1}{1 - \frac{v^{(1)2}}{c^2}} \Rightarrow 1 - \frac{v^{(1)2}}{c^2} = \frac{1}{\gamma^{(1)2}} \Rightarrow \frac{v^{(1)2}}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^{(1)2}}$$

$$\Rightarrow v^{(1)} = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^{(1)2}}} = c\sqrt{1 - \frac{1}{(1{,}30)^2}}$$

Con gli stessi passaggi $v^{(2)} = c\sqrt{1 - \frac{1}{(1{,}60)^2}}$

$$\frac{v^{(2)} - v^{(1)}}{v^{(1)}} = \frac{v^{(2)}}{v^{(1)}} - 1 = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{(1{,}60)^2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{(1{,}30)^2}}} - 1 = 0{,}22169\ldots \simeq \boxed{22\%}$$

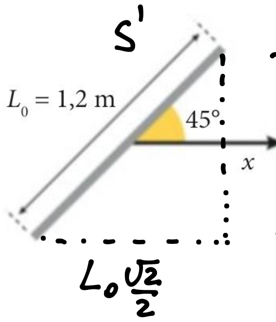
44 **FERMATI A PENSARE** Un'asta di lunghezza a riposo L_0 si muove a velocità relativistica v costante e forma un angolo di 45° con la direzione del moto, quando osservata nel sistema di riferimento S, come mostrato nella figura.



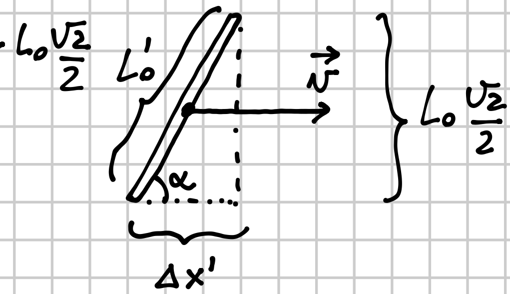
Un osservatore, fermo in S, misura la lunghezza dell'asta. Ottiene L_0? NO, poiché c'è il fenomeno della contrazione delle lunghezze nella direzione del moto → VEDI ESERCIZIO SUCCESSIVO

97 Un'asta di lunghezza a riposo L_0 = 1,2 m si muove a velocità v = 0,60c nella direzione x rispetto a un sistema di riferimento S. Nel sistema di riferimento solidale con l'asta, questa forma un angolo di 45° con la direzione orizzontale, come mostrato nella figura.

▶ Determina l'angolo di inclinazione dell'asta nel sistema di riferimento S. [51°]



Nel S.R.I. S



$\Downarrow$

$$\Delta x' \cdot \tan\alpha = L_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Delta x' = \frac{1}{\gamma} L_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = 0{,}60$$

$$\frac{1}{\gamma} \cancel{L_0} \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \tan\alpha = \cancel{L_0} \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \tan\alpha = \gamma$$

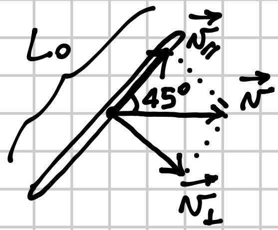
$$\alpha = \arctan\gamma = \arctan \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}60)^2}} = 51{,}34...^\circ \simeq \boxed{51^\circ}$$

Se volessi calcolare la lunghezza L_0' dell'asta nel S.R.I. S:

$$L_0' \cdot \sin\alpha = L_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow L_0' = \frac{\sqrt{2}}{2\sin\alpha} \cdot L_0 \simeq \frac{\sqrt{2}\,(1{,}2\ \text{m})}{2 \cdot \sin(51{,}34...^\circ)} = 1{,}086...\ \text{m} \simeq \boxed{1{,}1\ \text{m}}$$

OSSERVAZIONE

Se scomponiamo il vettore $\vec{v}$ in due componenti, una parallela alla sbarra e una perpendicolare:



- lungo la direzione di $\vec{v}_{\perp}$ non c'è contrazione della sbarra
- lungo la direzione di $\vec{v}_{\parallel}$ invece c'è contrazione della sbarra

$$v_{\parallel} = v \cdot \cos 45° = v \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}30\sqrt{2}\, c$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}30\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}18}}$$

LUNGHEZZA CONTRATTA $\quad L_0' = \frac{L_0}{\gamma} = (1{,}2\ m)\sqrt{1-0{,}18} = 1{,}0866\ldots\ m \simeq \boxed{1{,}1\ m}$

LO STESSO RISULTATO PRECEDENTE

51 ◆◆◆ Sulla Terra un razzo misura 3,0 m. Una volta in volo, la sua lunghezza misurata da Terra è 1/3 più corta. → la lunghezza nel S.R.I. in moto è $\frac{2}{3}$ ...

▸ A che velocità si muove il razzo? [$2{,}2 \times 10^8$ m/s $= 0{,}75c$]

$$\Delta x' = \frac{\overbrace{\Delta x}^{\text{lunghezza propria}}}{\gamma} \qquad \Delta x' = \frac{2}{3}\Delta x$$

$$\frac{2}{3}\cancel{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}}{\gamma} \implies \gamma = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{3}{2}$$

$$1-\beta^2 = \frac{4}{9}$$

$$\beta^2 = 1 - \frac{4}{9} \qquad \beta^2 = \frac{5}{9} \qquad v = \frac{\sqrt{5}}{3}c$$

$$= 0{,}7453\ldots c$$

$$\simeq \boxed{0{,}75c}$$

$$v = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot 3{,}00 \times 10^8 \frac{m}{s} = 2{,}236\ldots \times 10^8 \frac{m}{s}$$

$$\simeq \boxed{2{,}2 \times 10^8 \frac{m}{s}}$$

56 ◆◆◆ **ORA PROVA TU** La stella più vicina alla Terra, Proxima Centauri, si trova a 4,2 anni-luce. Un astronauta parte dalla stella per raggiungere la Terra a bordo di un'astronave con velocità $c/2$.

- Quanto tempo impiega un raggio di luce proveniente da Proxima Centauri a raggiungere la Terra?
- Qual è la distanza fra la stella e la Terra nel SRI dell'astronave?
- Quanto tempo impiega l'astronauta a raggiungere la Terra secondo l'orologio della sua astronave?

[4,2 a; 3,6 a.l.; 7,2 a]

a) $\Delta t_{luce} = 4{,}2\ a$

b) $\underbrace{\Delta x'}_{\text{distanza P.C. - TERRA nel S.R.I. dell'astronave} \to \text{CONTRATTA!}} = \frac{\Delta x}{\gamma} = \frac{4{,}2\ a.l.}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = 3{,}63...\ a.l. \simeq \boxed{3{,}6\ a.l.}$

$\beta = \frac{1}{2}$ $\qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

c) $v = \frac{\Delta x'}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x'}{v} = \frac{3{,}63...\ a.l.}{\frac{c}{2}} = \frac{(3{,}63....\ a)\cdot \cancel{c}}{\frac{\cancel{c}}{2}} =$

$1\ a.l. = (1a)\cdot c$

$= (3{,}63....\ a)\cdot 2 =$

$= 7{,}27...\ a \simeq \boxed{7{,}3\ a}$