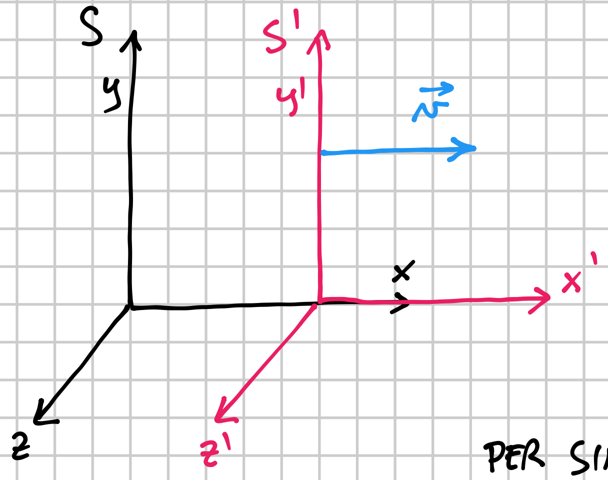
TRASFORMAZIONI DI LORENTZ INVERSE



$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{cases}$$

PER SIMMETRIA (sostituisco v con $-v$)

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt) \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t + \frac{\beta}{c}x'\right) \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{\overset{\text{MODULO}}{v}}{c}$$

COMPITO: invertire algebricamente
$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{cases}$$

SOLUZIONE

$$x' = \gamma x - v\gamma t \qquad \gamma x = x' + v\gamma t \qquad x = \frac{x'}{\gamma} + vt$$

SOSTITUISCO IN t' $\rightsquigarrow$
$$t' = \gamma\left[t - \frac{\beta}{c}\left(\frac{x'}{\gamma} + vt\right)\right] = \gamma t - \frac{\beta}{c}x' - \frac{\beta v \gamma}{c}t =$$

$$= \gamma t - \frac{\beta}{c}x' - \beta^2\gamma t$$

$$\Rightarrow \gamma t - \beta^2\gamma t = t' + \frac{\beta}{c}x' \qquad \gamma t(1-\beta^2) = t' + \frac{\beta}{c}x'$$

OSSERVO CHE

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow 1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2}}$$

$$\cancel{\gamma} t \cdot \frac{1}{\gamma^{\cancel{2}}} = t' + \frac{\beta}{c}x'$$

$$\boxed{t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right)}$$

$$x = \frac{x'}{\gamma} + vt = \frac{x'}{\gamma} + v\gamma t' + \overset{\beta^2}{\frac{v\beta}{c}}\gamma x' =$$

$$= \gamma x'\left(\frac{1}{\gamma^2} + \beta^2\right) + v\gamma t' = \gamma x'(1 - \cancel{\beta^2} + \cancel{\beta^2}) + v\gamma t' = \boxed{\gamma(x' + vt')}$$

73 ◆◆◆ **ORA PROVA TU** Due sistemi di riferimento inerziali in una dimensione S e S' hanno gli assi coordinati equiversi e le loro origini coincidono agli istanti $t = t' = 0$ s, quando una particella parte dall'origine O di S e, sempre in S, raggiunge la posizione $x = 1{,}90$ m all'istante t. La velocità di S' rispetto a S è $v = 1{,}13 \times 10^8$ m/s e la velocità della particella misurata nel sistema S' è $u' = 1{,}48 \times 10^8$ m/s.

▶ Calcola il valore dell'istante t e la velocità u della particella nel sistema S.

[$8{,}63 \times 10^{-9}$ s; $2{,}20 \times 10^8$ m/s]

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c} x\right) \end{cases}$$

S' $\qquad\qquad\qquad\qquad$ S

$x_1' = 0 \text{ m}$ $\quad$ $x_2' = u' t_2'$ $\qquad$ $x_1 = 0 \text{ m}$ $\quad$ $x_2 = 1{,}90 \text{ m}$

$t_1' = 0 \text{ s}$ $\quad$ $t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{\beta}{c} x_2\right)$ $\qquad$ $t_1 = 0 \text{ s}$ $\quad$ t_2

$$x_2' = u' t_2' = \gamma(x_2 - v t_2) \Rightarrow t_2' = \frac{\gamma}{u'}(x_2 - v t_2)$$

$$\frac{\cancel{\gamma}}{u'}(x_2 - v t_2) = \cancel{\gamma}\left(t_2 - \frac{\beta}{c} x_2\right)$$

$$x_2 - v t_2 = u' t_2 - u' \frac{\beta}{c} x_2$$

$$t_2 (u' + v) = \left(1 + u' \frac{\beta}{c}\right) x_2$$

$$t_2 = \frac{1 + u' \frac{v}{c^2}}{u' + v} x_2 = \frac{1 + 1{,}48 \frac{1{,}13}{(3{,}00)^2}}{(1{,}48 + 1{,}13) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} (1{,}90 \text{ m}) = 0{,}86324\ldots \times 10^{-8} \text{ s}$$

$$\simeq \boxed{8{,}63 \times 10^{-9} \text{ s}}$$

$$v_{\text{PART.}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1{,}90 \text{ m}}{8{,}6324\ldots \times 10^{-9} \text{ s}} = 0{,}2201\ldots \times 10^9 \frac{\text{m}}{\text{s}} \simeq \boxed{2{,}20 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

(IN S)