INTERVALLO INVARIANTE

EVENTO = qualcosa che accade in un certo punto dello spazio in un certo istante di tempo

ESEMPI = 1) emissione di un segnale all'istante t da una sorgente che si trova in (x, y, z)

2) passaggio all'istante t di una particella nel punto (x, y, z)

La fisica sostanzialmente è una ricostruzione di eventi (anche fenomeni complessi sono distribuzioni di eventi)

FENOMENO = è una successione di eventi (es. moto di una particella)

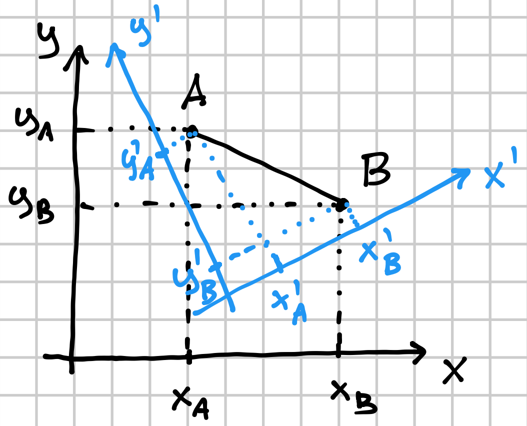
Formalmente un EVENTO è identificato con una quaterna di numeri:

$$(\underbrace{x, y, z}_{\substack{\text{COORDINATE}\\ \text{SPAZIALI}}}, \underbrace{t}_{\substack{\text{COORDINATA}\\ \text{TEMPORALE}}})$$

3 dimensioni spaziali + 1 dimensione temporale

Un evento è un punto di uno spazio quadridimensionale detto SPAZIO-TEMPO o SPAZIO DI MINKOWSKI

GEOMETRIA EUCLIDEA



$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = \overline{AB}^2$$

$$(x'_A - x'_B)^2 + (y'_A - y'_B)^2 = \overline{AB}^2$$

lunghezza di AB è INVARIANTE nei due S.R.

GEOMETRIA DELLO SPAZIO-TEMPO

$$A(x_A, y_A, z_A, t_A) \qquad B(x_B, y_B, z_B, t_B)$$

$$\boxed{\Delta\sigma^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta s^2}$$

INTERVALLO INVARIANTE

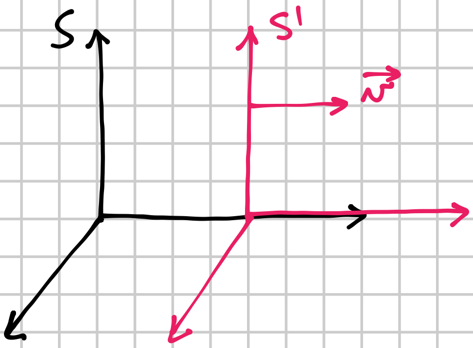
$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

$(\Delta x = x_B - x_A,\ \Delta y = y_B - y_A, \dots$
$\Delta t = t_B - t_A)$

Calcolando $\Delta\sigma'^2$ riferito alla stessa coppia di eventi in un altro S.R.I., si trova che

$$\Delta\sigma'^2 = \Delta\sigma^2$$

DIMOSTRAZIONE DELL'INVARIANZA



$$\Delta\sigma^2 = \Delta\sigma'^2$$

↑
OBIETTIVO

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \underbrace{\Delta y^2 + \Delta z^2}_{\Delta y'^2 + \Delta z'^2}$$

$$\begin{cases} \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \\ \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x\right) \end{cases}$$

$$\boxed{c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = \ldots\ldots = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2}$$ ← se dimostro questo, allora si ha che:

$$c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

$$\Delta\sigma'^2 = \Delta\sigma^2$$

$$c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = c^2\gamma^2\left(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x\right)^2 - \gamma^2(\Delta x - v\Delta t)^2 =$$

$$= \gamma^2\left[c^2\left(\Delta t^2 + \frac{\beta^2}{c^2}\Delta x^2 - 2\frac{\beta}{c}\Delta t\,\Delta x\right) - \left(\Delta x^2 + v^2\Delta t^2 - 2v\,\Delta x\,\Delta t\right)\right] =$$

$$= \gamma^2\left[c^2\Delta t^2 + \beta^2\Delta x^2 \cancel{- 2\underbrace{\beta c}_{v}\Delta t\,\Delta x} - \Delta x^2 - v^2\Delta t^2 \cancel{+ 2v\,\Delta x\,\Delta t}\right] =$$

$$= \gamma^2\left[(c^2 - v^2)\Delta t^2 + (\beta^2 - 1)\Delta x^2\right] = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 \qquad \underline{\text{C.V.D.}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$$

$$\Rightarrow \gamma^2(\beta^2 - 1) = -1$$

$$\gamma^2(c^2 - v^2) = \frac{c^2 - v^2}{1-\beta^2} = \frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} =$$

$$= \frac{c^2 - v^2}{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} = c^2$$

CLASSIFICAZIONE DELL'INTERVALLO INVARIANTE

(MEDIANTE IL SEGNO DI $\Delta\sigma^2$)

$$\Delta\sigma^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta s^2 \qquad (\text{dove } \Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

1] $\Delta\sigma^2 > 0$ INTERVALLO DI TIPO <u>TEMPO</u>

$$c^2\Delta t^2 > \Delta s^2 \implies c|\Delta t| > |\Delta s|$$

Gli eventi E_1 ed E_2 si dicono <u>CAUSALMENTE CONNESSI</u>

2] $\Delta\sigma^2 < 0$ INTERVALLO DI TIPO <u>SPAZIO</u>

$$c^2\Delta t^2 < \Delta s^2 \implies c|\Delta t| < |\Delta s|$$

Gli eventi E_1 ed E_2 si dicono <u>CAUSALMENTE NON CONNESSI</u>

3] $\Delta\sigma^2 = 0$ INTERVALLO DI TIPO <u>LUCE</u>

$$c|\Delta t| = |\Delta s|$$

Solo un segnale luminoso può collegare E_1 ed E_2

> Se un intervallo è di un certo tipo, lo è in <u>TUTTI</u> i S.R.I.

OSSERVAZIONI

(non nello stesso istante)

1) Se due eventi avvengono NELLO STESSO PUNTO DELLO SPAZIO (secondo un S.R.I.) il loro intervallo è di tipo TEMPO

$$\Delta x = 0 \implies \Delta\sigma^2 = c^2 \Delta t^2 > 0$$

Viceversa, se due eventi sono separati da un intervallo di tipo tempo, esiste un S.R.I. in cui essi si verificano nello stesso punto (si può dimostrare).

(non nello stesso luogo)

2) Se due eventi sono SIMULTANEI, allora $\Delta\sigma^2$ è di tipo SPAZIO

$$\Delta t = 0 \implies \Delta\sigma^2 = -\Delta s^2 < 0$$

Viceversa, se due eventi sono separati da un intervallo di tipo spazio, esiste un S.R.I. in cui essi sono simultanei (si può dimostrare)

3) Due eventi che consistono nell'emissione di un segnale luminoso in un certo istante e nella ricezione dello stesso segnale in un altro punto dello spazio sono separati da un intervallo di tipo luce

$$|\Delta s| = c|\Delta t| \implies \Delta\sigma^2 = 0$$

4) Se A e B sono due eventi l'uno la causa e l'altro l'effetto, allora sono CAUSALMENTE CONNESSI, cioè sono separati da un intervallo di tipo tempo (o luce)

↓ nel caso siano connessi da un segnale luminoso

$\Delta s = u \Delta t$ $\qquad$ $u \leq c$

↓ u = velocità del segnale che collega A e B

$$\Delta\sigma^2 = c^2\Delta t^2 - \underbrace{u^2\Delta t^2}_{\Delta s^2} = \underbrace{(c^2 - u^2)}_{\geq 0}\Delta t^2 \geq 0$$

L'ordine temporale "A prima di B" si realizza in tutti i S.R.I.

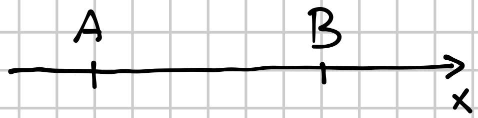
DIMOSTRAZIONE ALLA FINE

ALTRE OSSERVAZIONI

1) INT. DI TIPO TEMPO $\Delta\sigma^2 > 0$

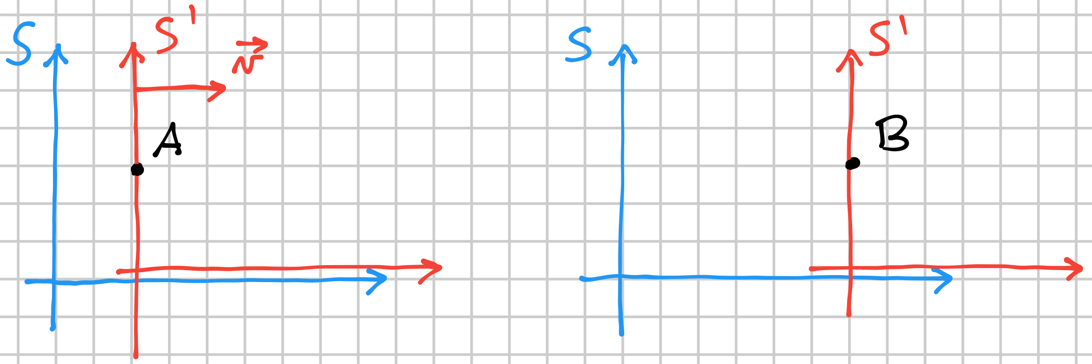
predomina la distanza temporale $\Rightarrow$ l'ordine degli eventi è preservato → A sempre prima di B

Se abbiamo una sola coordinata:



NON viene preservato il significato di DESTRA-SINISTRA, nel senso che DESTRA-SINISTRA non hanno un significato invariante, ma dipendono dal S.R.I.

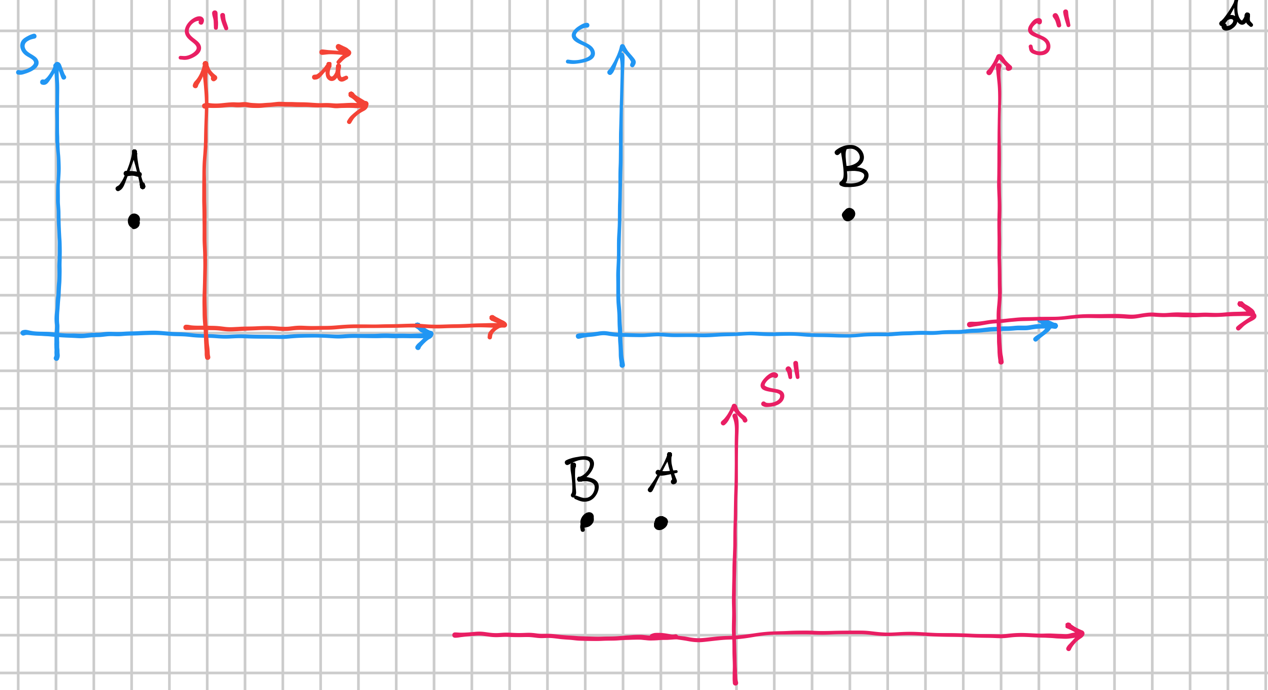
in alcuni S.R.I. A è a destra di B; in altri A è a sinistra di B; in uno A e B avvengono nello stesso luogo



S: A è a sinistra di B

S': A e B avvengono nello stesso luogo

S'': A è a destra di B



2) INT. DI TIPO SPAZIO $\Delta\sigma^2 < 0$

Predomina la distanza spaziale

PRIMA - DOPO non ha significato invariante, ma dipende dal S.R.I.

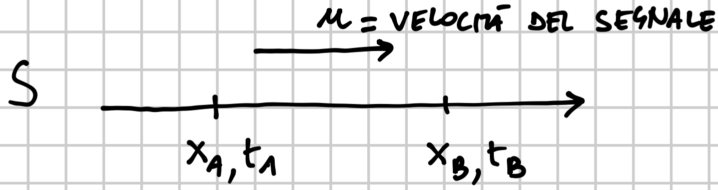
- A - B simultanei
- A prima di B
- A dopo B

$c\Delta t < \Delta s \Rightarrow$ un segnale non ha sufficiente tempo per percorrere la distanza tra A e B (dovrebbe andare più veloce della luce)

DIMOSTRAZIONE DEL MANTENIMENTO DELL'ORDINE TEMPORALE NEL CASO $\Delta\sigma^2 > 0$ (TIPO TEMPO)

A = emissione di un segnale da x_A all'istante t_A

B = ricezione del segnale in x_B all'istante t_B



$$(x_B - x_A) = u\,(t_B - t_A)$$ B si verifica DOPO A

cioè $\Delta t = t_B - t_A > 0$

Considero un S.R.I. S' con velocità v rispetto a S (lungo l'asse x)

$$\Delta t' = t'_B - t'_A \underset{\text{TR. DI LORENTZ}}{=} \gamma\left[(t_B - t_A) - \frac{\beta}{c}(x_B - x_A)\right] =$$

$$= \gamma\left[(t_B - t_A) - \frac{\beta u}{c}(t_B - t_A)\right] =$$

$$= \gamma\,(t_B - t_A)\left[1 - \frac{uv}{c^2}\right] = \gamma\,\underbrace{\left[1 - \frac{uv}{c^2}\right]}_{>0 \text{ perché } u, v < c}\,\Delta t$$

Quindi

$$\Delta t > 0 \Rightarrow \Delta t' > 0, \text{ cioè } t'_B - t'_A > 0 \Rightarrow t'_B > t'_A$$

(anche in S' B si verifica dopo A)