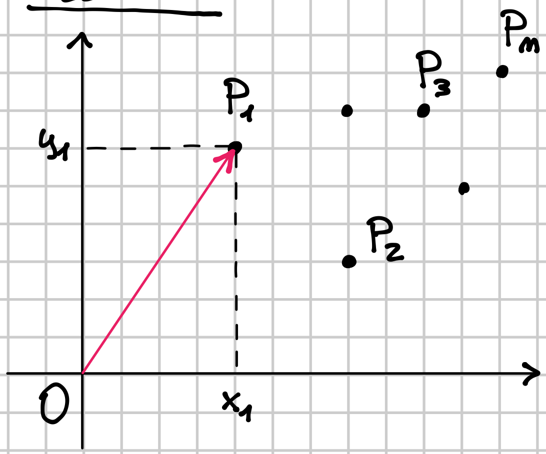
CENTRO DI MASSA DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI

NEL PIANO



Ad ogni punto P_i $i = 1, \dots, n$ è associata la sua massa m_i

(P_1, m_1)

(P_2, m_2)

$\vdots$

(P_n, m_n)

$\overrightarrow{OP_1} = \vec{r}_1$ vettore POSIZIONE di P_1 $\qquad \vec{r}_1 = (x_1, y_1)$

$\vdots$ " " $\vdots$ COMPONENTI CARTESIANE DEI VETTORI

$\overrightarrow{OP_n} = \vec{r}_n$ vettore POSIZIONE di P_n $\qquad \vec{r}_n = (x_n, y_n)$

Il VETTORE POSIZIONE del CENTRO DI MASSA C_M è <u>per definizione</u>

$$\vec{r}_{CM} = \overrightarrow{OC_M} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

equivale a

$$\vec{r}_{CM} = \begin{cases} x_{CM} = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\[2ex] y_{CM} = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \end{cases}$$

<u>COMPONENTI CARTESIANE</u> DI $\vec{r}_{CM}$ CHE COINCIDONO CON LE <u>COORDINATE</u> DI C_M

ESEMPI

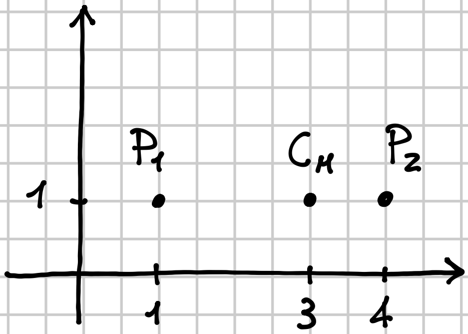
1) $P_1(1,1)$ $m_1 = 2\,kg$

$P_2(4,1)$ $m_2 = 4\,kg$

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 4}{2+4} = 3$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{2+4} = 1$$

$C_M(3,1)$

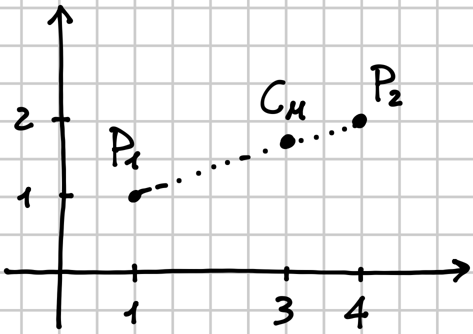


2) $P_1(1,1)$ $m_1 = 2\,kg$

$P_2(4,2)$ $m_2 = 4\,kg$

$$x_{CM} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 4}{4+2} = 3$$

$$y_{CM} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 2}{4+2} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$



$C_M\left(3, \frac{5}{3}\right)$ è allineato con P_1 e P_2

(nel caso di 2 punti è sempre sulla congiungente i 2 punti, più spostato verso quello di massa maggiore)

PROPRIETÀ DEL CENTRO DI MASSA

Per semplicità considero un sistema di 2 punti materiali: tutto ciò che diremo è facilmente generalizzabile a n punti.

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\Delta \vec{r}_{CM}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{CM}(t+\Delta t) - \vec{r}_{CM}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\dfrac{m_1 \vec{r}_1(t+\Delta t) + m_2 \vec{r}_2(t+\Delta t)}{m_1 + m_2} - \dfrac{m_1 \vec{r}_1(t) + m_2 \vec{r}_2(t)}{m_1 + m_2}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\dfrac{m_1 \vec{r}_1(t+\Delta t) + m_2 \vec{r}_2(t+\Delta t)}{m_1+m_2} - \dfrac{m_1 \vec{r}_1(t) + m_2 \vec{r}_2(t)}{m_1+m_2}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\dfrac{m_1 \vec{r}_1(t+\Delta t) - m_1 \vec{r}_1(t) + m_2 \vec{r}_2(t+\Delta t) - m_2 \vec{r}_2(t)}{m_1+m_2}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{m_1 \left[\vec{r}_1(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)\right] + m_2 \left[\vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_2(t)\right]}{\Delta t \, (m_1+m_2)} =$$

$$= \frac{m_1 \dfrac{\vec{r}_1(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)}{\Delta t} + m_2 \dfrac{\vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_2(t)}{\Delta t}}{m_1+m_2} =$$

$$= \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{\vec{P}_1 + \vec{P}_2}{m_{TOT}} \Rightarrow \vec{v}_{CM} = \frac{\vec{P}_1 + \vec{P}_2}{m_{TOT}} = \frac{\vec{P}_{TOT}}{m_{TOT}}$$

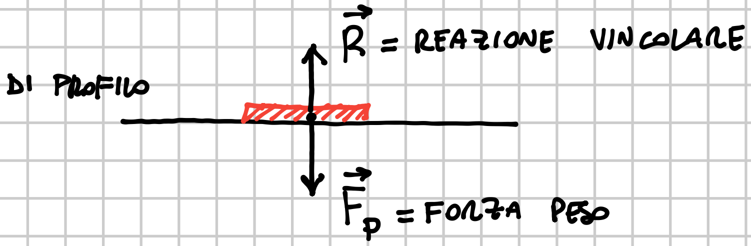
Quindi

$$\boxed{\vec{P}_{TOT} = m_{TOT} \, \vec{v}_{CM}}$$

SE LA RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE È NULLA, $\vec{P}_{TOT}$ SI CONSERVA, QUINDI $\vec{v}_{CM}$ È COSTANTE, CIOÈ IL CENTRO DI MASSA SI MUOVE DI <u>MOTO RETTILINEO UNIFORME</u>

LE FORZE INTERNE NON MODIFICANO IL MOTO DEL CENTRO DI MASSA, SOLO LE FORZE ESTERNE POSSONO FARLO

TRASCURIAMO L'ATTRITO, LE FORZA ESTERNE SONO: LA FORZA PESO E LA REAZIONE VINCOLARE DEL PIANO DI APPOGGIO



$$\vec{F}_p + \vec{R} = \vec{0}$$

SOMMA DELLE FORZE ESTERNE È NULLA

$\Downarrow$

CENTRO DI MASSA SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME