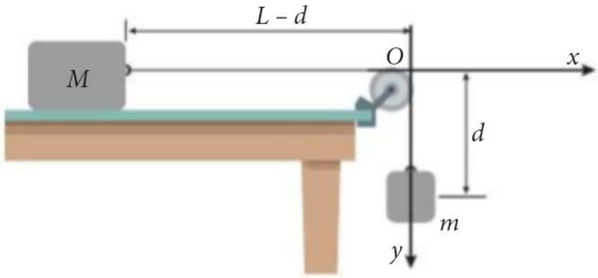
80 La figura mostra un sistema di due masse ($M = 6{,}0$ kg, $m = 3{,}0$ kg) collegate da una fune di lunghezza totale $L = 3{,}0$ m.



- Determina le coordinate della posizione del centro di massa in funzione di d, cioè della distanza dall'origine O della massa m.
- Il centro di massa può passare per il punto A (0,0 m; 1,0 m)?

Suggerimento: centra il sistema di riferimento sulla carrucola, come è mostrato nella figura.

[(−2,0 m + 2/3 d; 1/3 d); sì]

m — CENTRO DI MASSA $(0, d)$

M — CENTRO DI MASSA $(d - L, 0)$

$$x_{CM} = \frac{m \cdot 0 + M(d-L)}{m+M} = \frac{M(d-L)}{m+M}$$

$$y_{CM} = \frac{m \cdot d + M \cdot 0}{m+M} = \frac{m\,d}{m+M}$$

$$\vec{r}_{CM} = \left(\frac{M(d-L)}{m+M}, \frac{m\,d}{m+M}\right) = \left(\frac{6{,}0 \cdot (d - 3{,}0\,m)}{9{,}0}, \frac{3{,}0 \cdot d}{9{,}0}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}d - 2{,}0\,m, \frac{1}{3}d\right)$$

Esiste un valore di d tale che $\vec{r}_{CM} = (0, 1)$?

$$\frac{2}{3}d - 2{,}0\,m = 0 \Rightarrow 2d = 6{,}0\,m \Rightarrow d = 3{,}0\,m$$

$\Downarrow$

sostituito alla 2ª componente di $\vec{r}_{CM}$ dà un'uguaglianza vera:

$$\frac{1}{3} \cdot (3{,}0\,m) = 1{,}0\,m$$

OK

Quindi: sì, il CM passa per $(0,1)$

ALTRO MODO

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}d - 2 \\ y = \frac{1}{3}d \end{cases}$$

↑ COORDINATE DI CM

elimino il parametro d $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}(3y) - 2 \\ d = 3y \end{cases} \Rightarrow x = 2y - 2$$

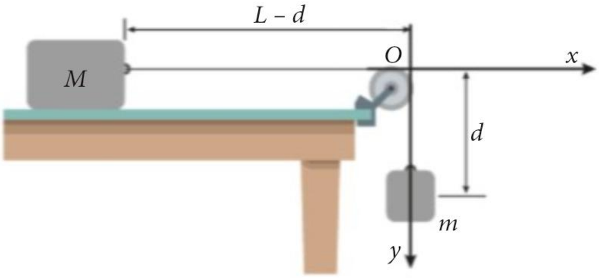
EQUAZIONE DELLA TRAIETTORIA DEL CM

$(0,1) \overset{?}{\in} x = 2y - 2$ SÌ, quindi il CM passa per $(0,1)$

$m = 3{,}0\ kg \qquad M = 6{,}0\ kg$

86 ◆◆◆ **PROBLEMA A PASSI**

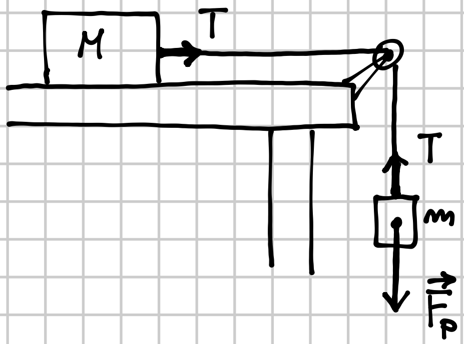
Considera lo stesso sistema dell'esercizio 80 con gli stessi dati. Trascura gli attriti.



▸ Trova le coordinate del centro di massa in funzione del tempo.

▸ Ricava l'equazione cartesiana della traiettoria del centro di massa.

$\left[\left(-2{,}0\ m + \frac{2}{3}d + \frac{1}{9}gt^2;\ \frac{1}{3}d + \frac{1}{18}gt^2\right);\ y_{CM} = \frac{1}{2}x_{CM} + 1{,}0\ m\right]$



M e m si muovono con accelerazioni di uguale modulo a

CORPO M
CORPO m

$$\begin{cases} T = Ma \\ F_p - T = ma \end{cases} \qquad \begin{cases} T = Ma \\ mg - Ma = ma \Rightarrow ma + Ma = mg \end{cases}$$

$$a(m+M) = mg$$

$$a = \frac{m}{m+M}g = \frac{3}{3+6}g = \frac{1}{3}g$$

L'accelerazione dei due corpi, in FORMA VETTORIALE è

$$\vec{a}_M = \left(\frac{1}{3}g, 0\right) \qquad \vec{a}_m = \left(0, \frac{1}{3}g\right)$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{M\vec{a}_M + m\vec{a}_m}{M+m} \qquad \left(\text{deriva da } \sum \vec{F}_{ext} = M_{tot}\,\vec{a}_{CM}\right)$$

$$a_{CMx} = \frac{M\frac{1}{3}g + m\cdot 0}{M+m} = \frac{M}{M+m}\cdot\frac{1}{3}g = \frac{\cancel{6}^{\,2}}{9}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}g = \frac{2}{9}g$$

$$a_{CMy} = \frac{M\cdot 0 + m\cdot\frac{1}{3}g}{M+m} = \frac{m}{M+m}\frac{1}{3}g = \frac{\cancel{3}}{9}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}g = \frac{1}{9}g$$

$$a_{CMx} = \frac{M\frac{1}{3}g + m\cdot 0}{M+m} = \frac{M}{M+m}\cdot\frac{1}{3}g = \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{9}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}g = \frac{2}{9}g$$

$$a_{CMy} = \frac{M\cdot 0 + m\cdot\frac{1}{3}g}{M+m} = \frac{m}{M+m}\frac{1}{3}g = \frac{\cancel{3}}{9}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}g = \frac{1}{9}g$$

$\vec{a}_{CM} = \left(\frac{2}{9}g, \frac{1}{9}g\right)$ orizzontalmente e verticalmente il CM si muove con acc. costante $\Rightarrow$ MOTO UNIF. ACCELERATO

$$x_{CM} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}g\right)t^2 + \frac{2}{3}d - 2{,}0\,m \Rightarrow$$

$$y_{CM} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}g\right)t^2 + \frac{1}{3}d \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_{CM} = \frac{1}{9}g\,t^2 + \frac{2}{3}d - 2{,}0\,m \\ y_{CM} = \frac{1}{18}g\,t^2 + \frac{1}{3}d \end{cases}$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE DELLA TRAIETTORIA DEL CENTRO DI MASSA (PARAMETRO t)

Per ricavare l'equazione della traiettoria, elimino il parametro t

$$\begin{cases} // \\ \frac{1}{18}g\,t^2 = y - \frac{1}{3}d \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{\cancel{9}}\cancel{g}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{18}}}{\cancel{g}}\left(y - \frac{1}{3}d\right) + \frac{2}{3}d - 2{,}0\,m \\ t^2 = \frac{18}{g}\left(y - \frac{1}{3}d\right) \end{cases}$$

$$x = 2y - \cancel{\frac{2}{3}d} + \cancel{\frac{2}{3}d} - 2 \Rightarrow \boxed{x = 2y - 2}$$

EQ. DELLA TRAIETTORIA DEL CM

(già trovata nell'es. precedente)

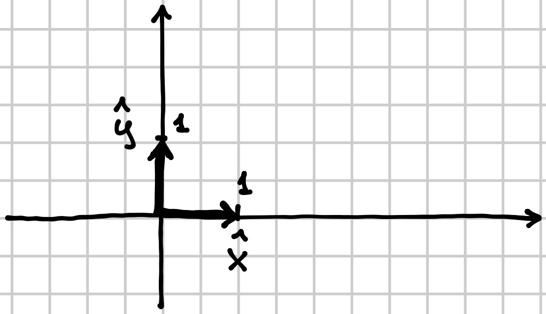
88 ◆◆◆ **ORA PROVA TU** Determina il vettore velocità e il vettore accelerazione del centro di massa del sistema descritto nell'esercizio 86.

$$\left[\left(\frac{2}{9}gt\right)\hat{x}+\left(\frac{1}{9}gt\right)\hat{y};\left(\frac{2}{9}g\right)\hat{x}+\left(\frac{1}{9}g\right)\hat{y}\right]$$

$$\vec{a}_{CM} = \left(\frac{2}{9}g, \frac{1}{9}g\right) \qquad \vec{v}_{CM} = \left(\frac{2}{9}gt, \frac{1}{9}gt\right)$$

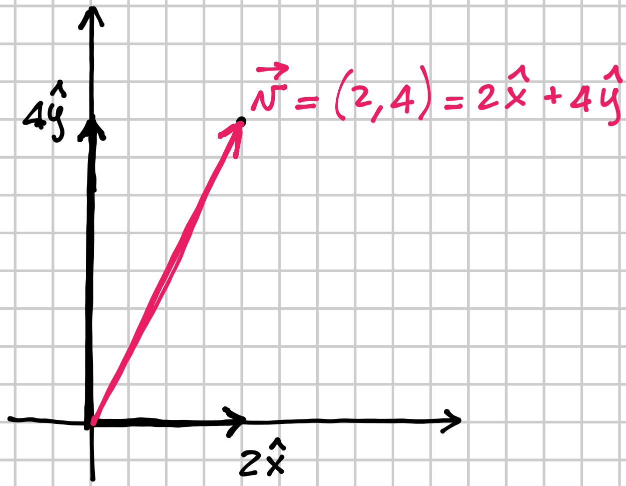
VELOCITÀ NEL MOTO UNIFORM. ACCELERATO

OSSERVAZIONE SULLE NOTAZIONI PER I VETTORI



$$\left.\begin{aligned}\hat{x} &= (1,0)\\ \hat{y} &= (0,1)\end{aligned}\right\}\ \text{VERSORI DEGLI ASSI CARTESIANI}$$

ESEMPIO



$$\vec{v} = (2,4) = 2\hat{x} + 4\hat{y}$$

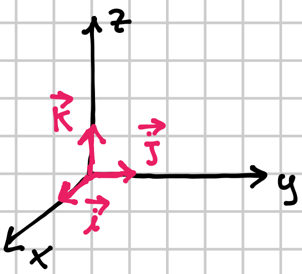
$$2\hat{x} = 2\cdot(1,0) = (2,0)$$

$$4\hat{y} = 4\cdot(0,1) = (0,4)$$

$$2\hat{x} + 4\hat{y} = (2,4)$$

NOTA BENE

In letteratura si usano queste notazioni per i versori degli assi cartesiani



$$\hat{x} = (1,0) = \vec{i}$$

$$\hat{y} = (0,1) = \vec{j}$$

IN TRE DIMENSIONI

$$\hat{x} = (1,0,0) = \vec{i}$$

$$\hat{y} = (0,1,0) = \vec{j}$$

$$\hat{z} = (0,0,1) = \vec{k}$$