113 Un pianeta il cui diametro equatoriale è di 6805 km ha una velocità di fuga di 5017 m/s.

▶ Calcola la massa del pianeta. [6,42 × 10^{23} kg]

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \implies v_f^2 = \frac{2GM}{R}$$

$$\implies M = \frac{R v_f^2}{2G} = \frac{\left(\frac{6805}{2} \times 10^3\,\mathrm{m}\right)\left(5017\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2\left(6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}\right)}$$

$$= 6{,}419\ldots \times 10^9 \times 10^{14}\,\mathrm{kg}$$

$$\simeq \boxed{6{,}42 \times 10^{23}\,\mathrm{kg}}$$

114 Una stella ha raggio di Schwarzschild pari a 4,06 × 10^5 m.

▶ Calcola la massa della stella. [2,74 × 10^{32} kg]

$$M = \frac{R_s c^2}{2G} = \frac{\left(4{,}06 \times 10^5\,\mathrm{m}\right)\left(3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}\right)^2}{2\left(6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}\right)} =$$

$$= 2{,}7391\ldots \times 10^{32}\,\mathrm{kg} \simeq \boxed{2{,}74 \times 10^{32}\,\mathrm{kg}}$$

117 ◆◆◆ Immagina che si voglia lanciare un razzo dal pianeta Venere in modo che sfugga al suo campo gravitazionale.

- ▶ Calcola la velocità minima che deve raggiungere il razzo.
- ▶ Se il razzo si trovasse sulla Terra riuscirebbe a sfuggire al suo campo gravitazionale?

[10,4 km/s; no]

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM_V}{R_V}} = \sqrt{\frac{2\left(6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}\right)\left(4{,}867 \times 10^{24}\ kg\right)}{6{,}052 \times 10^{6}\ m}} =$$

$$= 10{,}357\ldots \times 10^{3}\ \frac{m}{s} \simeq 10{,}4 \times 10^{3}\ \frac{m}{s} = \boxed{10{,}4\ \frac{km}{s}}$$

RISP.: Sulla Terra non riuscirebbe a uscire dal campo gravitazionale perché $v_{f_{TERRA}} \simeq 11{,}2\ \frac{km}{s} > v_{f_{VENERE}} \simeq 10{,}4\ \frac{km}{s}$

115 ◆◆◆ **ARGOMENTA** Considera un satellite di massa m che descrive un'orbita circolare a distanza R dal centro di un pianeta di massa M, che consideriamo fermo.

- Dimostra che l'energia potenziale U del sistema pianeta-satellite è uguale al doppio dell'energia cinetica K del satellite, cambiata di segno: $U = -2K$.
- Di conseguenza, mostra che l'energia meccanica totale $E_{tot} = K + U$ del sistema è uguale all'opposto dell'energia cinetica del satellite: $E_{tot} = -K$.

$$G\frac{\cancel{m}M}{R^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{R}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

SIST. PIANETA-SATELLITE

$$U = -G\frac{Mm}{R}$$

SATELLITE

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{GM}{R}$$

$$\Rightarrow U = -2\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{GMm}{R}}_{K} = -2K \Rightarrow \boxed{U = -2K}$$

EN. TOTALE

$$E_{TOT} = U + K = -2K + K = -K \Rightarrow \boxed{E_{TOT} = -K}$$

116 ◆◆◆ **DIMOSTRA** Un pianeta di massa m esegue un'orbita ellittica con semiasse maggiore a attorno a una stella di massa M, nel sistema di riferimento in cui essa è ferma. Si dimostra che in questo caso l'energia meccanica totale del sistema stella-pianeta è $E_{tot} = K + U = -G\frac{mM}{2a}$.

- Dimostra che questo risultato è coerente con quello trovato nella domanda precedente.

Nel caso precedente l'orbita è circolare $\Rightarrow a = R$, quindi

$$E_{TOT} = -G\frac{mM}{2R} \Rightarrow E_{TOT} = -G\frac{mM}{2a}$$

dall'esercizio precedente

perché $R = a$