INSIEMI NUMERICI

NUMERI NATURALI $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

NUMERI INTERI (RELATIVI) $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

NUMERI RAZIONALI $\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q}, \ p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0\}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

$\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ hanno lo stesso "numero di elementi" (CARDINALITÀ), infatti

$$\begin{array}{llllllllll}
\mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \ \dots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
\mathbb{Z}: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & 4 \ \dots
\end{array}$$

C'è una CORRISPONDENZA BIUNIVOCA tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$

C'è anche una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \dots \\
2 & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} & \dots \\
3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{6} & \dots \\
4 & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \frac{4}{6} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

$1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2} \dots$

$0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3, -3 \ \dots$

METTO "IN FILA" TUTTI I NUMERI DI $\mathbb{Q}$, cioè ho stabilito una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$

I numeri razionali sono tutti e soli i numeri PERIODICI (considerando anche lo 0 come periodo, se il numero è decimale limitato)

$$23,17\overline{524} = \frac{2317524-2317}{99900}$$

Dato un numero periodico, si riesce a risalire alla FRAZIONE GENERATRICE

Viceversa, è vero che dato una qualsiasi frazione, il suo sviluppo decimale è comunque periodico? (eventualmente con periodo 0)

Ad es. $\frac{23}{7}$

$$\begin{array}{l|l} 23 & 7 \\ \hline \;20 & 3,\overline{285714} \\ \;\;60 & \\ \;\;\;40 & \\ \;\;\;\;50 & \\ \;\;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\;\;30 & \\ \;\;\;\;\;\;\;2 & \end{array}$$

Quindi l'insieme $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri decimali periodici (anche con periodo 0).

$1,010010001000010000010000001\ldots$ non è un numero RAZIONALE

$\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$ ← DA DIMOSTRARE

Devo far vedere che non esistono due numeri $p, q \in \mathbb{Z}$ $(q \neq 0)$ tali che $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$

<u>PER ASSURDO</u> suppongo di trovare $p, q \in \mathbb{Z}$ tali che

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \qquad (p, q \text{ primi tra loro})$$

Ma allora vale anche $\frac{p^2}{q^2} = 2$, da cui $p^2 = 2q^2$

$p^2 = 2q^2 \Rightarrow$ p^2 è PARI e dunque anche p è PARI

(altrimenti p^2 sarebbe dispari)

$\Rightarrow p = 2m \Rightarrow p^2 = 4m^2 \Rightarrow 2q^2 = 4m^2$

$\Rightarrow q^2 = 2m^2 \Rightarrow q^2$ è PARI e dunque q è PARI

Siamo giunti a dire p è PARI e q è PARI CONTRADDIZIONE!

Perché p, q sono primi tra loro

$\sqrt{2}$ è un <u>NUMERO IRRAZIONALE</u>, il suo sviluppo decimale è infinito <u>NON PERIODICO</u> e non si può scrivere come frazione di numeri interi.

<u>INTERMEZZO: LA FRAZIONE GENERATRICE DI UN NUMERO PERIODICO</u>

$$23{,}17\overline{524} = \frac{2317524 - 2317}{99900}$$ Perché?

$$23{,}17\overline{524} = 23{,}17 + \underbrace{0{,}00\overline{524}}_{x} = \frac{2317}{100} + x$$

$$x = 0{,}00\overline{524} = 0{,}00524524524\ldots$$

$$1000x = 5{,}24524524\ldots = 5{,}24 + 0{,}00\overline{524} = 5{,}24 + x$$

$$\Downarrow$$

$$1000x - x = 5{,}24$$

$$999x = 5{,}24 \Rightarrow x = \frac{5{,}24}{999}$$

dunque

$$23{,}17\overline{524} = \frac{2317}{100} + \frac{5{,}24}{999} = \frac{999 \cdot 2317 + 524}{99900}$$

$$23,17\overline{524} = \frac{2317}{100} + \frac{5,24}{999} = \frac{999 \cdot 2317 + 524}{99900} =$$

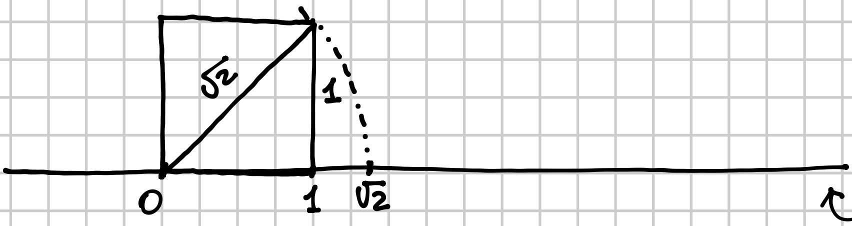
$$= \frac{(1000-1)\cdot 2317 + 524}{99900} =$$

$$= \frac{2317000 - 2317 + 524}{99900} = \frac{2317524 - 2317}{99900}$$

NUMERI REALI

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{IRRAZIONALI}\}$$

Mi servono i numeri reali, altrimenti non avrei ad es. $\sqrt{2}$, che rappresenta la misura della diagonale del quadrato di lato 1



AD OGNI PUNTO DELLA RETTA (IN CUI HO FISSATO 0 E 1) CORRISPONDE UN NUMERO REALE

Se mi fossi limitato a $\mathbb{Q}$, avrei avuto una "RETTA BUCATA"; invece, così, la retta è COMPLETA (o CONTINUA).

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Ci chiediamo: qual è la cardinalità di $\mathbb{R}$? È la stessa di $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$?

Se $\mathbb{R}$ avesse la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, si potrebbero mettere "in fila" tutti i numeri reali (stabilendo una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$).

Supponiamo di poter mettere in fila tutti i numeri reali, in particolare gli irrazionali (con il loro sviluppo decimale infinito non periodico)

$$
\begin{array}{l}
0,3598742133\,0\ldots \\
0,714563821\ldots \\
0,876342159\ldots \\
0,101003518\ldots \\
0,351609458\ldots \\
\vdots
\end{array}
$$

Considero il numero

$0,31600\ldots$

$\Downarrow$

Cambiamo le cifre di questo numero

$x = 0,42711\ldots$ NUOVO NUMERO

x è ancora un numero dell'elenco? <u>NO</u>, perché differisce per almeno una cifra da ogni numero dell'elenco.

Quindi non è possibile creare un elenco completo di tutti i numeri reali. Non esiste una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ ha una cardinalità "superiore" a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ hanno la <u>CARDINALITÀ DEL NUMERABILE</u> (INSIEMI NUMERABILI)

$\mathbb{R}$ ha la <u>CARDINALITÀ DEL CONTINUO</u> (INSIEME CONTINUO)