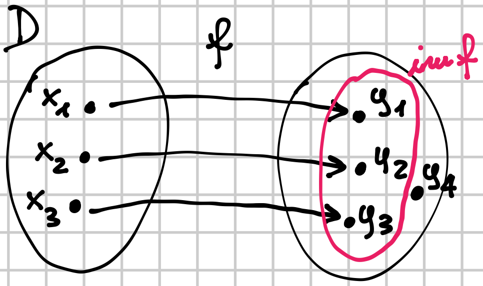
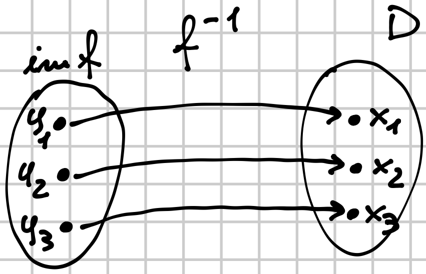
FUNZIONE INVERSA

Data una funzione f INIETTIVA si dice INVERSA di f la funzione da $\operatorname{im} f$ a $\operatorname{dom} f$ che associa ad ogni elemento di $\operatorname{im} f$ la sua controimmagine tramite f. Si indica con f^{-1}





$$\operatorname{im} f = \operatorname{dom} f^{-1}$$

$$\operatorname{im} f^{-1} = \operatorname{dom} f$$

$\forall x \in \operatorname{dom} f \quad f^{-1}(f(x)) = x$

$\forall y \in \operatorname{im} f \quad f(f^{-1}(y)) = y$

cioè f e f^{-1} sono l'una l'inversa dell'altra

ESEMPI

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = 3x \qquad f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$

$$x \xmapsto{f} 3x \xmapsto{f^{-1}} \frac{1}{3}x$$

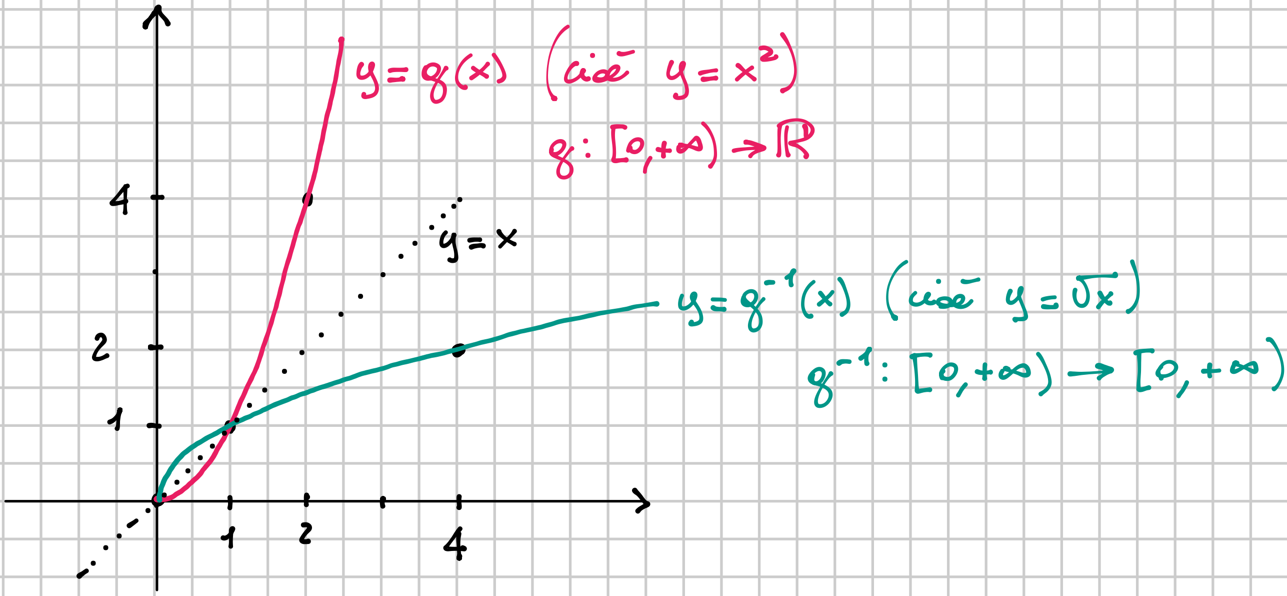
$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad f(f^{-1}(x)) = x$$

2) $g: [0,+\infty) \to \mathbb{R} \quad g(x) = x^2$ è iniettiva, dunque INVERTIBILE

$\operatorname{im} g = [0,+\infty)$

$g^{-1}: [0,+\infty) \to [0,+\infty) \qquad g^{-1}(x) = \sqrt{x}$

La funzione radice quadrata è l'inversa della RESTRIZIONE della funzione quadrato a $[0,+\infty)$



In generale il grafico di una funzione e della sua inversa sono simmetrici rispetto a $y = x$ (bisettrice I-III quadrante)

234 Data la funzione $f(x) = \frac{4x-5}{3}$, trova $f^{-1}(x)$ e calcola $f^{-1}(3)$. $\left[f^{-1}(x) = \frac{3x+5}{4};\ f^{-1}(3) = \frac{7}{2}\right]$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$y = \frac{4x-5}{3}$$

$$3y = 4x - 5$$

ricavo x

$$4x = 3y + 5$$

$$x = \frac{3y+5}{4}$$

scambio x e y e trovo l'equazione del grafico dell'inversa

$$y = \frac{3x+5}{4}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+5}{4} \qquad f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(3) = \frac{3 \cdot 3 + 5}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

236 Considera la funzione $f(x) = \sqrt{x+1}$, dimostra che è invertibile e poi risolvi l'equazione $f^{-1}(x) = f(8)$. $[x = 2]$

$f(x) = \sqrt{x+1}$ D: $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

$f: [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\text{im} f = [0, +\infty)$

Per dimostrare che è invertibile devo dimostrare che è iniettiva

$x_1, x_2 \in [-1, +\infty)$ $\sqrt{x_1+1} = \sqrt{x_2+1}$

$x_1 + 1 = x_2 + 1$

$x_1 = x_2$ è iniettiva dunque invertibile

$y = \sqrt{x+1}$

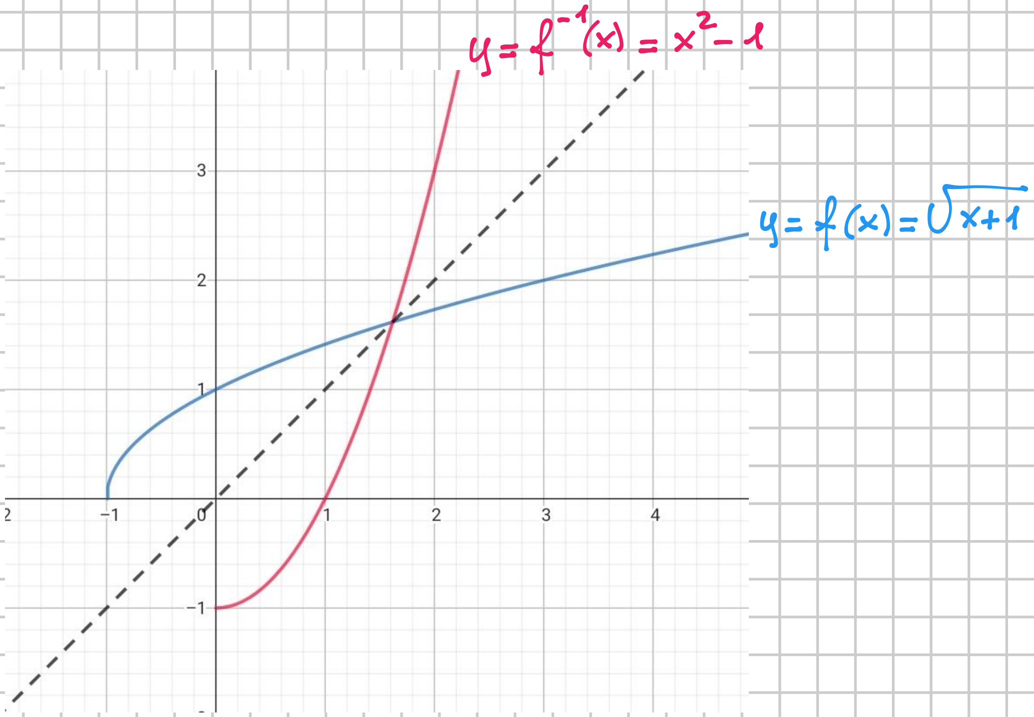
$y^2 = x + 1$

$x = y^2 - 1 \underset{\text{SCAMBIO } x \text{ E } y}{\Rightarrow}$ $y = x^2 - 1$

$f^{-1}(x) = x^2 - 1$

ATTENZIONE! Il dominio dell'inversa f^{-1} è l'insieme immagine di f

$f^{-1}: [0, +\infty) \to [-1, +\infty)$



Risolviamo l'equazione $f^{-1}(x) = f(8)$

$f(8) = \sqrt{8+1} = 3$

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

perché $x \in [0, +\infty) = \operatorname{dom} f^{-1}$