237 Data l'uguaglianza $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$, ricava y in funzione di x. Dimostra che ottieni una funzione invertibile e trova la funzione inversa. $\left[y=\frac{2x}{x-2}\right]$

$x \neq 0$
$y \neq 0$

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{2}-\frac{1}{x} \qquad y=\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}}=\frac{1}{\frac{x-2}{2x}}$$

$$y=\frac{2x}{x-2}$$

$x \neq 2$
$x \neq 0$

$D=\mathbb{R}\setminus\{0,2\}=$
$=(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$

Devo anche controllare per quali x si ha $y=0$.

$\frac{2x}{x-2}=0 \Rightarrow x=0$

Quindi ancora $x\neq 0$ (che ho già)

$f:\mathbb{R}\setminus\{0,2\}\to\mathbb{R} \qquad f(x)=\frac{2x}{x-2}$

controllo che sia iniettiva:

$x_1,x_2\in D$

$$\frac{2x_1}{x_1-2}=\frac{2x_2}{x_2-2}$$

$$\cancel{2}x_1(x_2-2)=\cancel{2}x_2(x_1-2)$$

$$\cancel{x_1x_2}-2x_1=\cancel{x_1x_2}-2x_2$$

$$-2x_1=-2x_2$$

$x_1=x_2$ OK è INIETTIVA, quindi invertibile

TROVO L'ESPRESSIONE DELL'INVERSA

$$y = \frac{2x}{x-2}$$

ricavo x

$$y(x-2) = 2x$$

$$xy - 2y = 2x$$

$$xy - 2x = 2y$$

$$x(y-2) = 2y$$

$$x = \frac{2y}{y-2} \xRightarrow{\text{SCAMBIO } x \text{ E } y} \boxed{y = \frac{2x}{x-2}}$$

EQ. DEL GRAFICO DELLA FUNZIONE INVERSA

SISTEMIAMO DOMINI E CODOMINI

$f : \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \frac{2x}{x-2}$

Qual è l'insieme immagine?
Chiedersi questo equivale a chiedersi per quali y l'equazione

$$y = \frac{2x}{x-2} \quad \text{ha soluzione}$$

RISPOSTA:

$$y(x-2) = 2x$$

$$xy - 2y = 2x$$

$$xy - 2x = 2y$$

$$x(y-2) = 2y$$

questa equazione ha soluzione per $y \neq 2$

$$\operatorname{im} f = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

Dunque $f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-2}$ $\quad f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0,2\} \to \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$

Dimostrare che è invertibile e trovare l'inversa

241 $y = \sqrt[3]{3x-1}$ $\left[y = \frac{x^3+1}{3}\right]$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

INIETTIVITÀ $\Rightarrow$ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (DOMINIO)

$\sqrt[3]{3x_1-1} = \sqrt[3]{3x_2-1}$ elevo al cubo

$3x_1 - 1 = 3x_2 - 1$

$3x_1 = 3x_2$

$x_1 = x_2$ OK INIETTIVA, dunque invertibile

$y = \sqrt[3]{3x-1}$

$y^3 = 3x - 1$

$3x = y^3 + 1$

$x = \frac{y^3+1}{3} \Longrightarrow y = \frac{x^3+1}{3}$ $f^{-1}(x) = \frac{x^3+1}{3}$ $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

242 Completa analizzando il grafico della funzione $f(x)$.

a. $f(-2) =$ 0

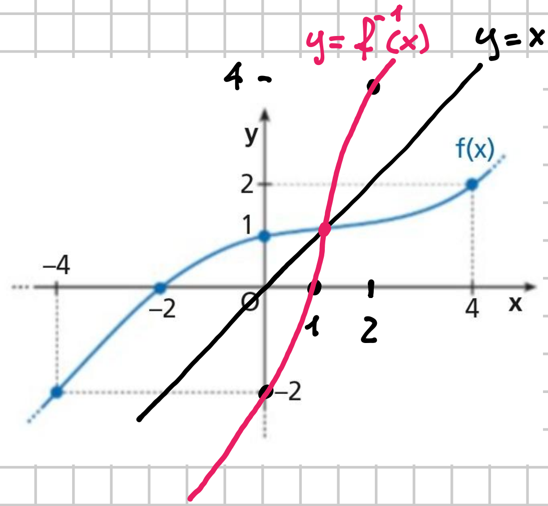
b. $f^{-1}(2) =$ 4

c. $f^{-1}(1) =$ 0

d. $f^{-1}(0) =$ −2

e. $f(4) =$ 2

Disegna il grafico della funzione inversa.



243 Considera la funzione f rappresentata dal grafico della figura.

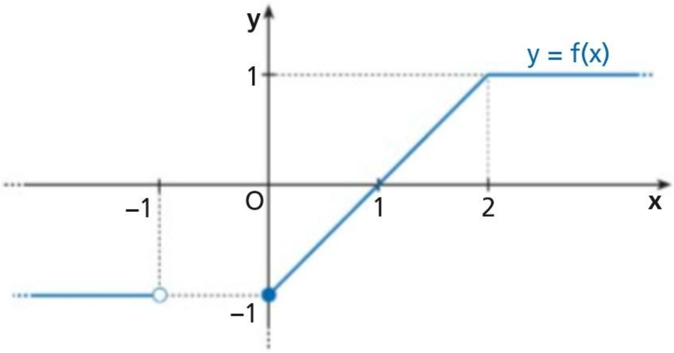
a. Trova il dominio e l'insieme immagine di f;

b. indica se f è iniettiva, biiettiva, invertibile;

c. trova $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ e completa $f($0$) = -1$, $f($2$) = 1$, $f($1$) = 0$;

d. l'espressione analitica della funzione è la seguente? NO

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{se } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$



[a) D: $x < -1 \vee x \geq 0$; $Im(f)$: $-1 \leq y \leq 1$; c) -1, $\nexists\, f(-1)$, $-1, 0, 1$; d) no]

$\text{dom} f = D = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ $\quad \text{im} f = [-1, 1]$ $\quad f: D \to \mathbb{R}$

NON INIETTIVA, ad es. $f(3) = f(4) = f(5) = \ldots = 1$

NON SURIETTIVA, ad es. $y = -2$ non ha controimmagini (così come tutti gli y che non appartengano a $[-1, 1]$)

$f(-2) = -1$ $\quad f(-1)$ NON ESISTE $\quad f(0) = -1$ $\quad f(1) = 0$ $\quad f(2) = 1$

L'espressione analitica corretta è

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -1 \\ x - 1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

l'uguale si può mettere anche qui (non c'è ambiguità)