401 Scrivi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, che passa per i punti $P(0;1)$ e $Q(1;-9)$ e che ha vertice sulla retta di equazione $y=-4x-5$. $[y=10x^2-20x+1;\ y=2x^2-12x+1]$

In 3 passi

1. Poni le condizioni di appartenenza dei punti P e Q alla parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$.
2. Inserisci nell'equazione della retta le coordinate del vertice della parabola $y=ax^2+bx+c$, ottenendo la terza condizione.
3. Poni a sistema le tre condizioni in a, b, c e risolvilo.

$$y=ax^2+bx+c$$

$P(0,1)$

$Q(1,-9)$

$V\in\ y=-4x-5$

$V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$

$$\begin{cases} 1=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \Rightarrow c=1 \\ -9=a+b+c \\ -\frac{\Delta}{4a}=-4\left(-\frac{b}{2a}\right)-5 \end{cases} \qquad \begin{cases} c=1 \\ a+b+1=-9 \\ -\frac{\Delta}{4a}=\frac{2b}{a}-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=1 \\ a+b=-10 \\ \frac{-\Delta}{\cancel{4a}}=\frac{8b-20a}{\cancel{4a}} \end{cases} \qquad \begin{cases} c=1 \\ a=-10-b \\ -b^2+4ac=8b-20a \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=1 \\ a=-10-b \\ -b^2+4(-10-b)\cdot 1=8b-20(-10-b) \end{cases}$$

$$-b^2-40-4b=8b+200+20b$$

$$b^2+32b+240=0 \qquad \frac{\Delta}{4}=16^2-240=256-240=16$$

$$b=-16\pm 4=\begin{cases} -20 \\ -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=10 \\ b=-20 \\ c=1 \end{cases} \quad \boxed{y=10x^2-20x+1} \qquad \begin{cases} a=2 \\ b=-12 \\ c=1 \end{cases} \quad \boxed{y=2x^2-12x+1}$$

505 Determina b e c in modo che le parabole di equazioni $y = x^2 + bx$ e $y = -x^2 - 2x + c$ intersechino la retta r di equazione $y = -5$ nel punto di ascissa 1. Verifica che le due parabole sono tangenti, determina l'equazione della tangente comune t e calcola l'area del triangolo formato da t, r e l'asse y.

[$y = x^2 - 6x$, $y = -x^2 - 2x - 2$; t: $y = -4x - 1$; 2]

$P(1, -5)$ punto della retta $y = -5$ di ascissa 1

$y = x^2 + bx \qquad -5 = 1 + b \Rightarrow b = -6 \qquad \boxed{y = x^2 - 6x}$

$y = -x^2 - 2x + c \qquad -5 = -1 - 2 + c \Rightarrow c = -2 \qquad \boxed{y = -x^2 - 2x - 2}$

Controlliamo che P sia l'unico punto di intersezione:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x \\ y = -x^2 - 2x - 2 \end{cases} \qquad -x^2 - 2x - 2 = x^2 - 6x$$

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad (x-1)^2 = 0 \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = -5 \end{cases}$$

Non ci sono altre intersezioni oltre a P

Trovo le tangenti in P e verifico che sono uguali

$$\begin{cases} y + 5 = m(x - 1) \\ y = x^2 - 6x \end{cases} \qquad x^2 - 6x + 5 = mx - m$$

$$x^2 - 6x - mx + 5 + m = 0$$

$$x^2 - (m+6)x + m + 5 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (m+6)^2 - 4(m+5) = 0$$

$$m^2 + 36 + 12m - 4m - 20 = 0$$

$$m^2 + 8m + 16 = 0 \qquad (m+4)^2 = 0 \Rightarrow m = -4$$

$y + 5 = -4(x - 1) \qquad \boxed{y = -4x - 1}$

$$\begin{cases} y+5=m(x-1) \\ y=-x^2-2x-2 \end{cases}$$

$$-x^2-2x-2+5=mx-m$$

$$-x^2-2x-mx+m+3=0$$

$$-x^2-(m+2)x+(m+3)=0$$

$$\Delta=0 \Rightarrow (m+2)^2+4(m+3)=0$$

$$m^2+4+4m+4m+12=0$$

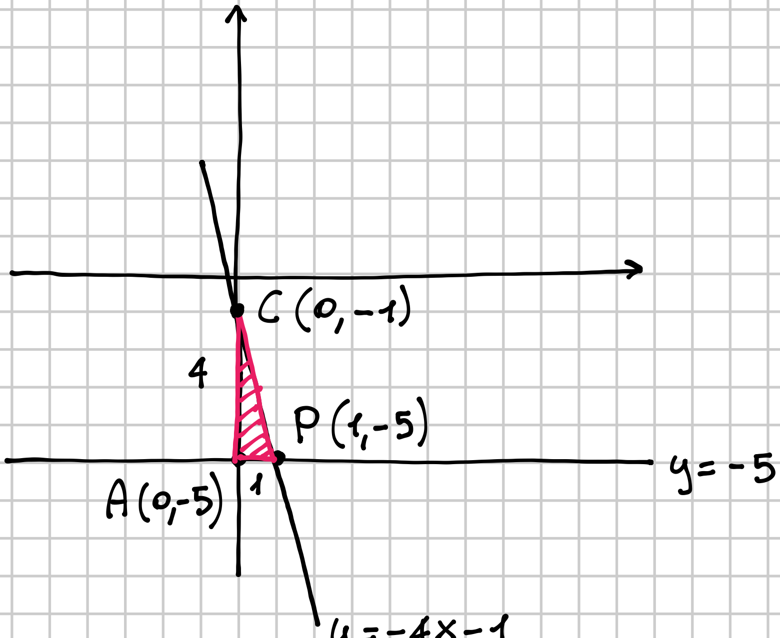
$$m^2+8m+16=0 \Rightarrow (m+4)^2=0 \Rightarrow m=-4$$

la tangente è ancora $y=-4x-1$, dunque in P le 2 parabole hanno la stessa tangente $\Rightarrow$ sono tangenti tra di loro

$t: \ y=-4x-1$

$r: \ y=-5$

asse y: $x=0$



$$\mathcal{A}_{APC}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4=2$$

COME TROVARE LA TANGENTE A UNA PARABOLA IN UN SUO PUNTO

$y = ax^2 + bx + c$

$P(x_0, y_0)$ punto della parabola

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

DEVO TROVARE m

Siccome P appartiene alla parabola $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$

$$\begin{cases} y = mx - mx_0 + y_0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = mx - mx_0 + y_0$$

$$ax^2 + bx - mx + c + mx_0 - y_0 = 0$$

$$ax^2 + (b - m)x + c + mx_0 - y_0 = 0$$

PONGO

$\Delta = 0 \qquad (b - m)^2 - 4a[c + mx_0 - y_0] = 0$

$$b^2 + m^2 - 2bm - 4ac - 4amx_0 + 4ay_0 = 0$$

$$m^2 + (-2b - 4ax_0)m + b^2 - 4ac + 4ay_0 = 0$$

$$m^2 - 2(2ax_0 + b)m + b^2 - 4ac + 4a(ax_0^2 + bx_0 + c) = 0$$

$$m^2 - 2(2ax_0 + b)m + b^2 \cancel{-4ac} + 4a^2x_0^2 + 4abx_0 \cancel{+4ac} = 0$$

$$m^2 - 2(2ax_0 + b)m + (2ax_0 + b)^2 = 0$$

$$[m - (2ax_0 + b)]^2 = 0 \Rightarrow m = 2ax_0 + b$$

coeff. angolare della tangente alla parabola $y = ax^2 + bx + c$ nel suo punto (x_0, y_0)

L'equazione della tangente è

$$\boxed{y - y_0 = (2ax_0 + b)(x - x_0)}$$