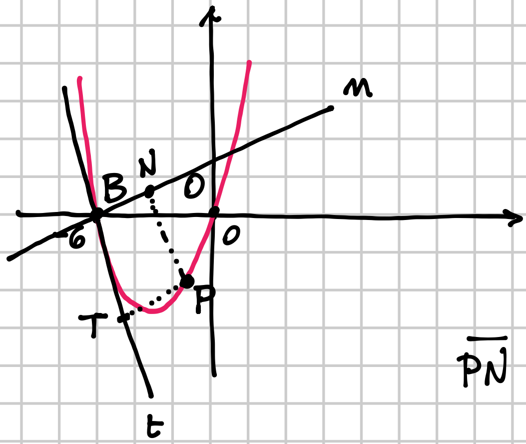
56 Considera la parabola di equazione $y = x^2 + 6x$ che interseca l'asse x nei punti O e B. Determina le coordinate di un punto P, appartenente all'arco OB della parabola, tale che la somma delle sue distanze dalla tangente t in B e dalla normale n alla curva in B sia $\frac{60}{\sqrt{37}}$. $\left[O(0;0), B(-6;0); P_1(-1;-5), P_2\left(-\frac{18}{5};-\frac{216}{25}\right)\right]$



$O(0,0) \quad B(-6,0) \leftarrow x^2+6x=0 \Rightarrow x=0 \vee x=-6$

$-6 \le x \le 0$ CONDIZIONE PER $P(x, x^2+6x)$ DI APPARTENENZA ALL'ARCO OB

$$\overline{PN} + \overline{PT} = \frac{60}{\sqrt{37}}$$

Trovo la tangente in B: $m = 2x_B + 6 = 2(-6)+6 = -6$

$$y - 0 = -6(x+6) \qquad y = -6x - 36 \text{ TANGENTE}$$

$$\Downarrow$$

$$6x + y + 36 = 0$$

Trovo la normale in B: $m' = \frac{1}{6}$

$$y - 0 = \frac{1}{6}(x+6) \qquad y = \frac{1}{6}x + 1 \text{ NORMALE}$$

$$\Downarrow$$

$$x - 6y + 6 = 0$$

$P(\underbrace{x}_{x_0}, \underbrace{x^2+6x}_{y_0}) \quad -6 \le x \le 0$

DISTANZA DI P DALLA TANGENTE

$$\overline{PT} = \frac{|6x + x^2 + 6x + 36|}{\sqrt{6^2+1^2}} = \frac{|x^2+12x+36|}{\sqrt{37}}$$

DISTANZA DI P DALLA NORMALE

$$\overline{PN} = \frac{|x - 6(x^2+6x) + 6|}{\sqrt{1^2+(-6)^2}} = \frac{|x - 6x^2 - 36x + 6|}{\sqrt{37}} = \frac{|-6x^2 - 35x + 6|}{\sqrt{37}}$$

$$\frac{|x^2+12x+36|}{\cancel{\sqrt{37}}} + \frac{|6x^2+35x-6|}{\cancel{\sqrt{37}}} = \frac{60}{\cancel{\sqrt{37}}} \qquad -6 \le x \le 0$$

$$|x^2+12x+36|+|6x^2+35x-6|=60 \qquad -6\leq x\leq 0$$

$$(x+6)^2+|6x^2+35x-6|=60$$

$$|6x^2+35x-6|=\underbrace{60-(x+6)^2}_{\geq 0 \text{ per } -6\leq x\leq 0}$$

$$|f(x)|=g(x) \iff \begin{cases} g(x)\geq 0 \\ f(x)=\pm g(x) \end{cases}$$

1) $6x^2+35x-6 \overset{+}{=} 60-(x+6)^2$

$-6\leq x\leq 0$

$$6x^2+35x-6=60-x^2-12x-36 \qquad 7x^2+47x-30=0$$

$$\Delta=2209+840=3049$$

$$x=\frac{-47\pm\sqrt{3049}}{14}= \begin{cases} -7{,}3\ldots \text{ N.A.} \\ 0{,}58\ldots \text{ N.A.} \end{cases}$$

2) $6x^2+35x-6=-60+(x+6)^2 \qquad -6\leq x\leq 0$

$$6x^2+35x-6=-60+x^2+36+12x$$

$$5x^2+23x+18=0 \qquad \Delta=529-4\cdot5\cdot18=169=13^2$$

$$x=\frac{-23\pm13}{10}= \begin{cases} -\frac{36}{10}=-\frac{18}{5} \\ -1 \end{cases}$$

$$x=-\frac{18}{5} \qquad y=\left(-\frac{18}{5}\right)^2+6\left(-\frac{18}{5}\right)=\frac{324}{25}-\frac{108}{5}=\frac{324-5\cdot108}{25}=-\frac{216}{25}$$

$$\boxed{P_1\left(-\frac{18}{5},-\frac{216}{25}\right)}$$

$$x=-1 \qquad y=(-1)^2+6(-1)=-5 \qquad \boxed{P_2(-1,-5)}$$