53 Considera la parabola avente per fuoco il punto $F(-4; -3)$ e per direttrice la retta d di equazione $y + 5 = 0$.

a. Scrivi le equazioni delle tangenti p e q alla parabola mandate dal punto D della direttrice avente ascissa $-\frac{5}{2}$ e verifica che sono fra loro perpendicolari.

b. Trova P e Q, punti di tangenza delle rette p e q con la parabola e verifica che sono allineati con il fuoco della parabola.

$\left[\text{a) } y = 2x, 2x + 4y + 25 = 0; \text{ b) } P \equiv O(0; 0), Q\left(-5; -\frac{15}{4}\right)\right]$

$F(-4,-3)$

$y=-5$

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -4 \\ \frac{1-\Delta}{4a} = -3 \\ -\frac{1+\Delta}{4a} = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 8a \\ 1-\Delta = -12a \\ -1-\Delta = -20a \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 8a \\ 1-\Delta = -12a \\ 1+\Delta = 20a \end{cases}$$

$$2 = 8a$$

$$\begin{cases} b = 2 \\ a = \frac{1}{4} \\ \Delta = -1 + 20 \cdot \frac{1}{4} = -1+5 = 4 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \quad c = \frac{b^2-\Delta}{4a} = \frac{4-4}{4 \cdot \frac{1}{4}} = 0$$

$$\boxed{y = \frac{1}{4}x^2 + 2x}$$

$D\left(-\frac{5}{2}, -5\right)$

$$\begin{cases} y+5 = m\left(x + \frac{5}{2}\right) \\ y = \frac{1}{4}x^2 + 2x \end{cases}$$

$$\frac{1}{4}x^2 + 2x + 5 = mx + \frac{5}{2}m$$

$$\frac{1}{4}x^2 + 2x - mx + 5 - \frac{5}{2}m = 0$$

$$\frac{1}{4}x^2 + (2-m)x + 5 - \frac{5}{2}m = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow \quad (2-m)^2 - \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \left(5 - \frac{5}{2}m\right) = 0 \qquad 4 + m^2 - 4m - 5 + \frac{5}{2}m = 0$$

$$4 + m^2 - 4m - 5 + \frac{5}{2}m = 0$$

$$8 + 2m^2 - 8m - 10 + 5m = 0$$

$$2m^2 - 3m - 2 = 0 \qquad \Delta = 9 + 16 = 25$$

$$m = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{cases}$$ coeff. angolari antireciproci

$\Downarrow$

p e q sono PERPENDICOLARI

$$y + 5 = m\left(x + \frac{5}{2}\right) \qquad m = -\frac{1}{2} \Rightarrow \quad y + 5 = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

$$y + 5 = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{25}{4}$$

$$\boxed{2x + 4y + 25 = 0}$$

$$m = 2 \Rightarrow \quad y + 5 = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

$$\boxed{y = 2x}$$

Trovo i punti di tangenza

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 + 2x \\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{25}{4} \end{cases} \qquad \frac{1}{4}x^2 + 2x = -\frac{1}{2}x - \frac{25}{4}$$

$$x^2 + 8x + 2x + 25 = 0 \qquad x^2 + 10x + 25 = 0$$

$$(x+5)^2 = 0 \qquad \begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{5}{2} - \frac{25}{4} = -\frac{15}{4} \end{cases}$$

$$P\left(-5, -\frac{15}{4}\right)$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 + 2x \\ y = 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{2x} = \frac{1}{4}x^2 + \cancel{2x} \\ y = 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad O(0,0)$$

Dobbiamo verificare che $P\left(-5,-\frac{15}{4}\right)$, $O(0,0)$ e $F(-4,-3)$ appartengano alla stessa retta (ALLINEATI)

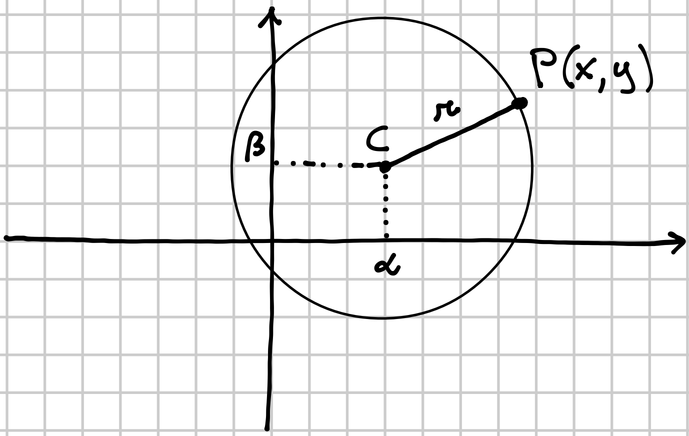
retta OF : $y=\frac{3}{4}x$

verifico che $P \in OF$ $\quad -\frac{15}{4} \overset{?}{=} \frac{3}{4}(-5)$ ok!

CIRCONFERENZA

Dato nel piano un punto $C(\alpha, \beta)$ (CENTRO) e un numero reale $r > 0$ (RAGGIO), si chiama <u>CIRCONFERENZA</u> DI CENTRO C E RAGGIO r il luogo geometrico dei punti del piano che distano r da C.

<u>CERCHIO</u> = luogo geometrico dei punti del piano che distano da C per un valore compreso tra 0 e r (PUNTI INTERNI + BORDO)



$$\overline{CP} = r$$

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 \underbrace{-2\alpha x}_{a} \underbrace{-2\beta y}_{b} + \underbrace{\alpha^2 + \beta^2 - r^2}_{c} = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$$

EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA

$$\left.\begin{array}{l} a = -2\alpha \\ b = -2\beta \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = -\dfrac{a}{2} \\ \beta = -\dfrac{b}{2} \end{array}$$

CENTRO $C\left(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{b}{2}\right)$

$$c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 \Rightarrow r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c$$

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$$

RAGGIO

CONDIZIONE $\alpha^2 + \beta^2 - c > 0$

ESEMPI

1) $x^2+y^2-4x+2y-4=0$

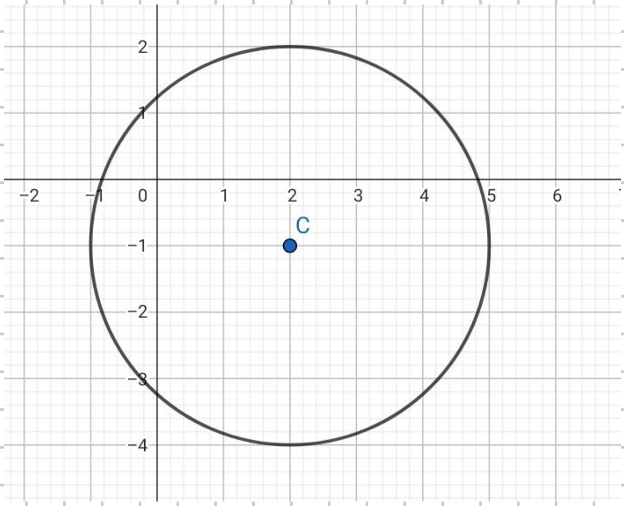
$\alpha = -\frac{a}{2} = -\frac{-4}{2} = 2$

$\beta = -\frac{b}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$C(2,-1)$ CENTRO

$\alpha^2+\beta^2-c = 2^2+(-1)^2-(-4) = 4+1+4 = 9$

$r = \sqrt{9} = 3$ RAGGIO



2) $x^2+y^2-4x+2y+6=0$

$\alpha = 2 \quad \beta = -1$

$\alpha^2+\beta^2-c = 4+1-6 = -1 < 0$

NON È UNA CIRCONFERENZA

3) $x^2+y^2-4x+2y+5=0$

$\alpha = 2 \quad \beta = -1$

$\alpha^2+\beta^2-c = 4+1-5 = 0$

$r = 0 \Rightarrow$ CIRCONFERENZA DEGENERE

$\Downarrow$

l'equazione rappresenta solo 1 punto, il centro $C(\alpha, \beta)$

È come se la circonferenza "COLLASSASSE" sul suo centro

MA NON È UNA CIRCONFERENZA!

5 Trova l'equazione della circonferenza con centro $C(-1;-2)$ e raggio 5. $[x^2+y^2+2x+4y-20=0]$

$\alpha = -\frac{a}{2} \qquad -1 = -\frac{a}{2} \Rightarrow a = 2$

$\beta = -\frac{b}{2} \qquad -2 = -\frac{b}{2} \Rightarrow b = 4$

$c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 =$

$= 1 + 4 - 25 = -20$

$\boxed{x^2+y^2+2x+4y-20=0}$

METODO PIÙ VELOCE:

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \qquad (x+1)^2+(y+2)^2=25$

$x^2+1+2x+y^2+4+4y-25=0$

$\boxed{x^2+y^2+2x+4y-20=0}$