420 Scrivi l'equazione della circonferenza con il diametro di estremi $A(1; 1)$ e $B(3; 5)$ e della parabola con asse parallelo all'asse y passante per A e con vertice in B. Trova l'ulteriore punto C di intersezione fra la circonferenza e la parabola e verifica che in tale punto le due curve hanno la stessa tangente t. Trova poi per quale punto P della parabola si verifica che:

$$\sqrt{5}\,\overline{PQ} + \overline{PR} = 2,$$

essendo Q e R le proiezioni di P rispettivamente sulla retta t e sull'asse x.

$[x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0;\ y = -x^2 + 6x - 4;\ C(4; 4);\ t: y = -2x + 12;\ P(5;1)]$

Centro circonf. $C_0\left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (2, 3)$ $\quad r = \sqrt{(1-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5}$

$\uparrow$
$\overline{CA}$

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5 \qquad x^2 + 4 - 4x + y^2 + 9 - 6y - 5 = 0$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0}$$

$A(1,1)$ $B(3,5)$ parabola per A con vertice in B

$y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 3 \\ 5 = 9a + 3b + c \\ 1 = a + b + c \end{cases} \quad \begin{cases} b = -6a \\ 9a - 18a + c = 5 \\ a - 6a + c = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -6a \\ -9a + 1 + 5a = 5 \Rightarrow -4a = 4 \\ c = 1 + 5a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -4 \end{cases} \qquad \boxed{y = -x^2 + 6x - 4}$$

$$\begin{cases} y = -x^2 + 6x - 4 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (-x^2 + 6x - 4)^2 - 4x - 6(-x^2 + 6x - 4) + 8 = 0$$

$x^2 + x^4 + 36x^2 + 16 - 12x^3 + 8x^2 - 48x - 4x + 6x^2 - 36x + 24 + 8 = 0$

$x^4 - 12x^3 + 51x^2 - 88x + 48 = 0$

$$x^4 - 12x^3 + 51x^2 - 88x + 48 = 0$$

Dato che $A(1,1)$ e $B(3,5)$ sono punti di intersezione fra circonf. e parabola, so già che 1 e 3 sono soluzioni dell'equazione

	1	-12	51	-88	48
1		1	-11	40	-48
	1	-11	40	-48	//

$$(x^3 - 11x^2 + 40x - 48)(x-1) = 0$$

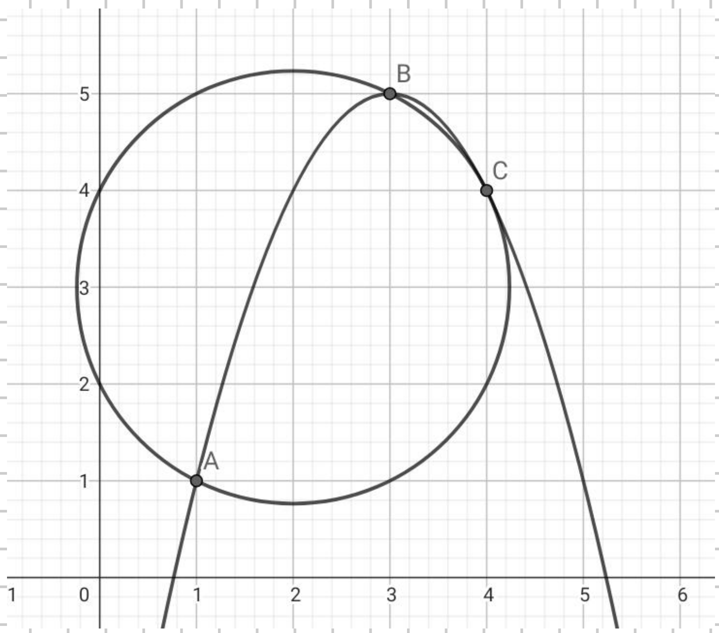
	1	-11	40	-48
3		3	-24	48
	1	-8	16	//

$$(x^2 - 8x + 16)(x-3)(x-1) = 0$$

$$(x-4)^2(x-3)(x-1) = 0$$

$$x = 4 \Rightarrow y = -4^2 + 6 \cdot 4 - 4$$
$$= -16 + 24 - 4 = 4$$

L'ulteriore punto di intersezione è $C(4,4)$



Le 2 curve sono tangenti (tra loro) in C se in tale punto <u>hanno la stessa tangente</u>

Trovo la tangente in C alla parabola

$C(4,4)$

$$\begin{cases} y-4=m(x-4) \Rightarrow y=mx-4m+4 \\ y=-x^2+6x-4 \end{cases}$$

$$mx-4m+4=-x^2+6x-4$$

$$x^2+mx-6x-4m+8=0$$

$$x^2+(m-6)x+8-4m=0$$

$$\Delta=0 \Rightarrow (m-6)^2-4(8-4m)=0$$

$$m^2+36-12m-32+16m=0$$

$$m^2+4m+4=0 \qquad (m+2)^2=0 \Rightarrow m=-2$$

$$y=-2x+12$$

TANGENTE ALLA PARABOLA IN C

Controllo che tale retta è tangente anche alla circonferenza verificando che la sua distanza dal centro $C_0(2,3)$ è pari al raggio $r=\sqrt{5}$

$$2x+y-12=0 \quad \text{(F. IMPLICITA)}$$

$$\text{DISTANZA TANGENTE} - C_0 = \frac{|2\cdot 2+3-12|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \quad \text{OK!}$$

P è un generico punto della parabola $y=-x^2+6x-4$

$$P(x, -x^2+6x-4)$$

$\overline{PQ}$ = distanza tra P e la retta tangente $2x+y-12=0$

$$\overline{PQ}=\frac{|2x-x^2+6x-4-12|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|-x^2+8x-16|}{\sqrt{5}}=\frac{|x^2-8x+16|}{\sqrt{5}}$$

$$\overline{PR}=|-x^2+6x-4|=|x^2-6x+4|$$

$$\sqrt{5}\,\overline{PQ}+\overline{PR}=2 \Rightarrow \cancel{\sqrt{5}}\frac{|x^2-8x+16|}{\cancel{\sqrt{5}}}+|x^2-6x+4|=2$$

$$|x^2-8x+16|+|x^2-6x+4|=2$$

$$|(x-4)^2|+|x^2-6x+4|=2$$

il modulo non serve

$$|x^2-6x+4|=2-(x-4)^2$$

$$|x^2-6x+4|=2-(x^2-8x+16)$$

$$|x^2-6x+4|=-x^2+8x-14$$

$$\begin{cases} -x^2+8x-14\geq 0 \Rightarrow x^2-8x+14\leq 0 \quad \frac{\Delta}{4}=16-14=2 \quad x=4\pm\sqrt{2} \\ x^2-6x+4=\pm(-x^2+8x-14) \end{cases}$$

$$\boxed{4-\sqrt{2}\leq x\leq 4+\sqrt{2}}$$

C.E.

$$\begin{cases} \underbrace{\frac{4-\sqrt{2}}{}}_{2,58\ldots} \le x \le \underbrace{4+\sqrt{2}}_{5,41\ldots} \\ x^2-6x+4 = \pm\left(-x^2+8x-14\right) \end{cases}$$

(1) $x^2-6x+4 = -x^2+8x-14$

$2x^2-14x+18=0 \qquad x^2-7x+9=0 \qquad x = \dfrac{7\pm\sqrt{49-36}}{2} = \dfrac{7\pm\sqrt{13}}{2}$

$x = \dfrac{7-\sqrt{13}}{2} \simeq 1,697 \qquad x = \dfrac{7+\sqrt{13}}{2} \simeq 5,3$

NON ACCETTABILE

$x = \dfrac{7+\sqrt{13}}{2} \qquad y = -\left(\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}\right)^2 + \cancel{6}^{\,3}\cdot\dfrac{7+\sqrt{13}}{\cancel{2}} - 4 =$

$= -\dfrac{49+13+14\sqrt{13}}{4} + 21 + 3\sqrt{13} - 4 =$

$= -\dfrac{\cancel{62}^{\,31} + \cancel{14}^{\,7}\sqrt{13}}{\cancel{4}_{\,2}} + 17 + 3\sqrt{13} = \dfrac{-31-7\sqrt{13}+34+6\sqrt{13}}{2} =$

$= \dfrac{3-\sqrt{13}}{2} \qquad P_1\left(\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}, \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$

(2) $\cancel{x^2}-6x+4 = \cancel{x^2}-8x+14$

$2x = 10 \qquad x = 5 \qquad y = -5^2+6\cdot 5-4 =$

$= -25+30-4 = 1$

$P_2(5,1)$