96 **LEGGI IL GRAFICO** Considera la funzione

$$f(x) = a\log_2|x+b|+c$$

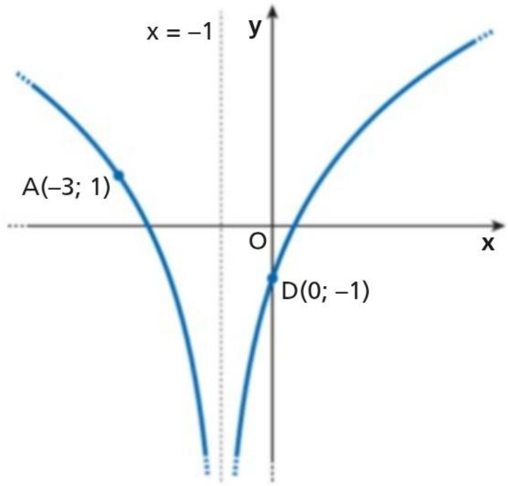
rappresentata nel grafico a fianco.

a. Determina i valori dei parametri a, b e c sulla base dei dati deducibili dal grafico.

b. Risolvi la disequazione $f(x) \leq 3$.

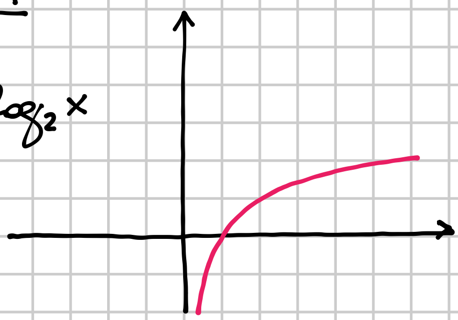
c. Dimostra che $f(x)$ è invertibile nell'intervallo $]-1;+\infty[$ e scrivi l'espressione della funzione inversa.

$\left[\text{a) } a=2, b=1, c=-1; \text{ b) } -5 \leq x < -1 \vee -1 < x \leq 3; \text{ c) } f^{-1}(x) = 2^{\frac{x+1}{2}} - 1\right]$

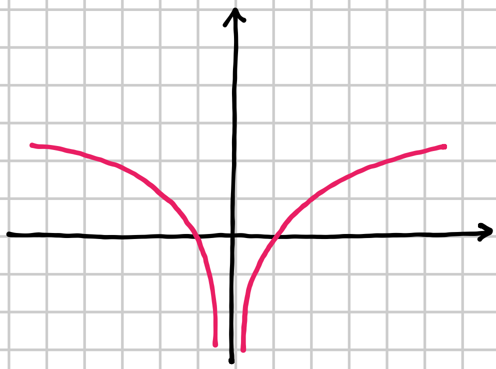


PREMESSA

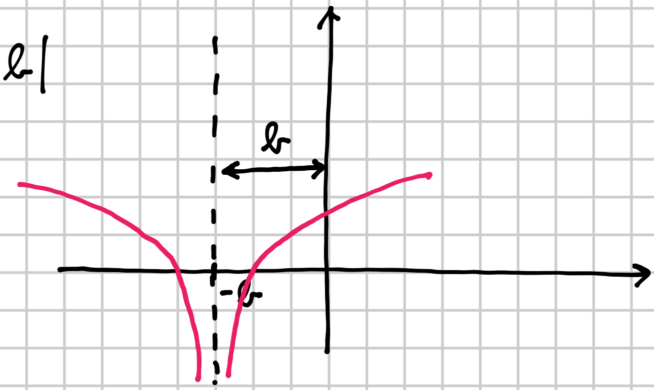
$y = \log_2 x$



$y = \log_2|x|$



$y = \log_2|x+b|$



a) Quindi, dal grafico si legge che $b = 1$ $\qquad y = a\log_2|x+1| + c$

Per trovare a, c uso il passaggio per $A(-3, 1)$ e $D(0, -1)$

$$\begin{cases} 1 = a\log_2|-3+1| + c \\ -1 = a\log_2|0+1| + c \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = a\log_2 2 + c \\ -1 = a\log_2 1 + c \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = a + c \\ -1 = c \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$f(x) = 2\log_2|x+1| - 1 \qquad f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$$

b) $f(x) \leq 3$

$2\log_2|x+1| - 1 \leq 3$ C.E. $x \neq -1$

$\begin{cases} 2\log_2|x+1| \leq 4 \\ x \neq -1 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2|x+1| \leq 2 \\ x \neq -1 \end{cases}$ $\begin{cases} |x+1| \leq 4 \\ x \neq -1 \end{cases}$

$\begin{cases} -4 \leq x+1 \leq 4 \\ x \neq -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x+1 \leq 4 \\ x+1 \geq -4 \\ x \neq -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -5 \\ x \neq -1 \end{cases}$ $-5 \leq x \leq 3 \ \wedge \ x \neq -1$

oppure

$-5 \leq x < -1 \ \vee \ -1 < x \leq 3$

oppure

$[-5,-1) \cup (-1,3]$

c) Nell'intervallo $(-1,+\infty)$ la funzione è strett. crescente, quindi INIETTIVA, quindi INVERTIBILE

$f(x) = 2\log_2(x+1) - 1$ (nell'intervallo considerato $|x+1| = x+1$, perché $x+1>0$)

$y = 2\log_2(x+1) - 1$

$y+1 = 2\log_2(x+1)$ $\log_2(x+1) = \dfrac{y+1}{2}$

$x+1 = 2^{\frac{y+1}{2}}$ $x = 2^{\frac{y+1}{2}} - 1$

INVERSA $\boxed{f^{-1}(x) = 2^{\frac{x+1}{2}} - 1}$

24 $3\log_4 x - \log_4(x+1) = \log_4(x^4-81) + \log_{\frac{1}{4}}(x^2-2x-3)$

C.E.

$$\begin{cases} x>0 \\ x+1>0 \\ x^4-81>0 \\ x^2-2x-3>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0 \\ x>-1 \\ (x^2-9)(x^2+9)>0 \Rightarrow x<-3 \lor x>3 \\ (x-3)(x+1)>0 \Rightarrow x<-1 \lor x>3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x>3}$$

C.E.

$$\log_4 x^3 - \log_4(x+1) = \log_4(x^4-81) + \frac{\log_4(x^2-2x-3)}{\underbrace{\log_4 \frac{1}{4}}_{-1}}$$

$$\log_4 \frac{x^3}{x+1} = \log_4 \frac{x^4-81}{x^2-2x-3}$$

C.E.
$x>3$

$$\frac{x^3}{\cancel{x+1}} = \frac{(x^2+9)(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-3)}}$$

$$x^3 = (x^2+9)(x+3) \qquad \cancel{x^3} = \cancel{x^3} + 3x^2 + 9x + 27$$

$$\begin{cases} x^2+3x+9=0 & \Delta = 9-36<0 \quad \underline{\text{IMPOSSIBILE}} \\ x>3 \end{cases}$$