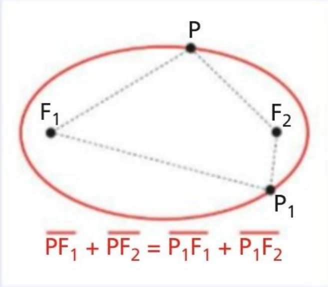
# ELLISSE NEL PIANO CARTESIANO

**DEFINIZIONE**

Assegnati nel piano due punti, $F_1$ e $F_2$, si chiama **ellisse** il luogo geometrico dei punti $P$ del piano tali che sia costante la somma delle distanze di $P$ da $F_1$ e da $F_2$:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \textbf{costante}.$$

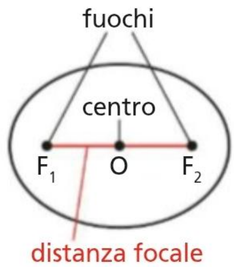



$F_1$ e $F_2$ sono i **fuochi** dell'ellisse.
Il punto medio del segmento $F_1F_2$ è il **centro** dell'ellisse.

Indichiamo con:

$2c$ la distanza tra $F_1$ e $F_2$, detta **distanza focale**;

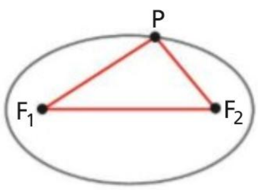
$2a$ la somma costante delle distanze dei punti dell'ellisse dai fuochi.




$\overline{OF_1} = \overline{OF_2} = c$

SEMIDISTANZA FOCALE

Deve essere $2a > 2c \Rightarrow a > c$




$a$ e $c$ indicano due valori costanti e positivi.

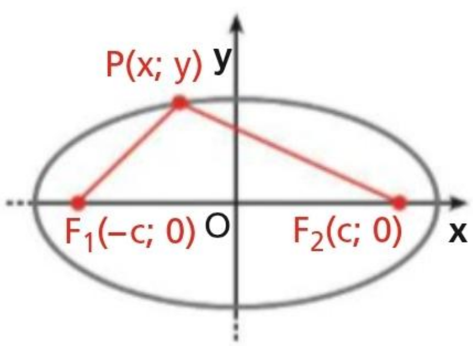
Se $P$ è un generico punto dell'ellisse, per definizione deve risultare:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a.$$

Poiché in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due, considerato il triangolo $PF_1F_2$, deve essere:

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} > \overline{F_1F_2}$ " $2a > 2c$ " $\boldsymbol{a > c}$.

## EQUAZIONE DELL'ELLISSE (FUOCHI SU ASSE x)




$F_1(-c, 0) \quad F_2(c, 0)$

costante $= 2a$

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+\cancel{y^2}=4a^2+(x-c)^2+\cancel{y^2}-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{c^2}+2cx=4a^2+\cancel{x^2}+\cancel{c^2}-2cx-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

$$a^2\left[(x-c)^2+y^2\right]=a^4+c^2x^2-2a^2cx$$

$$a^2\left[x^2+c^2-2cx+y^2\right]=a^4+c^2x^2-2a^2cx$$

$$a^2x^2+a^2c^2\cancel{-2a^2cx}+a^2y^2=a^4+c^2x^2\cancel{-2a^2cx}$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} a>c \Rightarrow a^2-c^2>0 \\ \Downarrow \\ a^2-c^2=b^2 \end{array}}$$

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$$

DIVIDO PER $a^2b^2$

$$\frac{x^2\cancel{b^2}}{a^2\cancel{b^2}}+\frac{\cancel{a^2}y^2}{\cancel{a^2}b^2}=\frac{\cancel{a^2b^2}}{\cancel{a^2b^2}}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \qquad c^2=a^2-b^2$$

EQ. ELLISSE COI FUOCHI SULL'ASSE X (RIF. CANONICO)

$$a>b$$

Nel procedimento si è elevato 2 volte al quadrato. Quindi si sarebbe giunti alla stessa equazione anche da

1) $-\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$

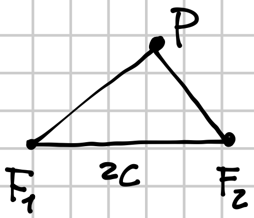
2) $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$

3) $-\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$

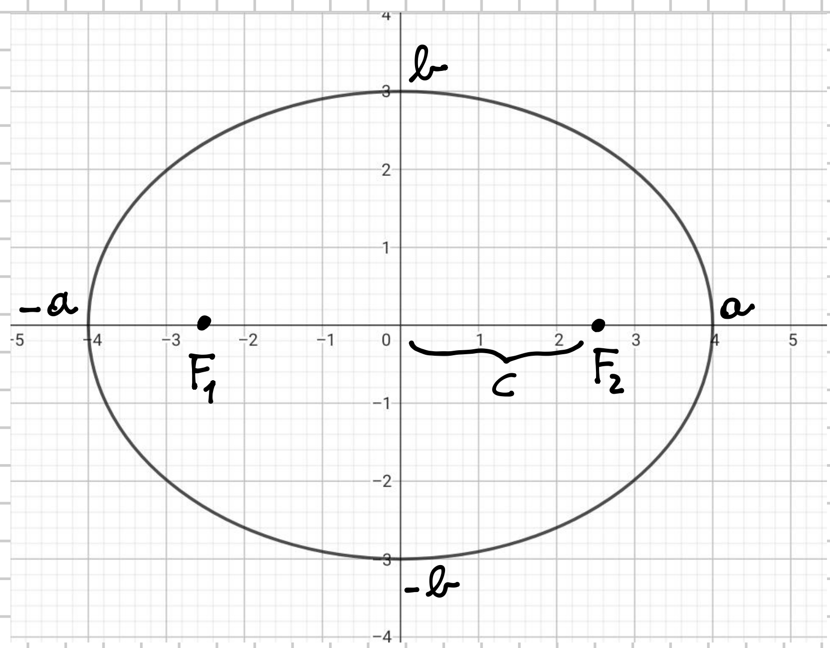
Nessuna di queste equazioni può essere soddisfatta da punti del piano. Infatti:

- la 1) ha i due membri di segno opposto $\Rightarrow$ IMPOSSIBILE

- la 2) e la 3) o ancora hanno segni opposti, oppure sono false perché la differenza tra 2 lati di un triangolo deve essere minore del terzo lato, e troveremmo quindi $2a < 2c \Rightarrow a < c$, mentre abbiamo supposto $a > c$




Quindi, anche elevando al quadrato, <u>NON SI AGGIUNGONO PUNTI</u>.




$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a > b$

$a$ = SEMIASSE MAGGIORE

$b$ = SEMIASSE MINORE

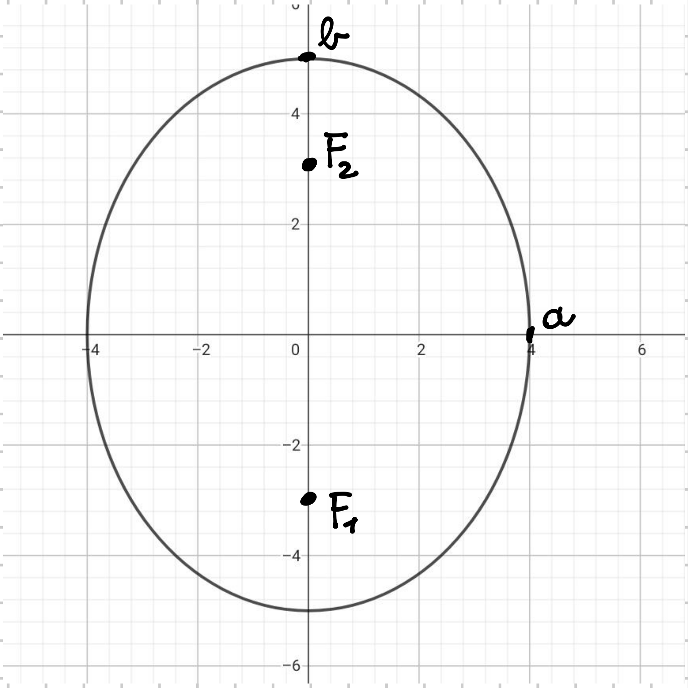
$A_1(-a,0)$ $A_2(a,0)$

$B_1(0,-b)$ $B_2(0,b)$

VERTICI DELL'ELLISSE

$F_1(-c,0)$ $F_2(c,0)$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

# ELLISSE COI FUOCHI SULL'ASSE y




$b > a$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a$ = SEMIASSE MINORE

$b$ = SEMIASSE MAGGIORE

$c^2 = b^2 - a^2 \qquad c = \sqrt{b^2 - a^2}$

FUOCHI $F_1(0, -c)$ $F_2(0, c)$

## ECCENTRICITÀ DELL'ELLISSE

$$e = \frac{c}{\text{SEMIASSE MAGGIORE}}$$

FUOCHI SU ASSE x $\Rightarrow e = \frac{c}{a} < 1$

FUOCHI SU ASSE y $\Rightarrow e = \frac{c}{b} < 1$

L'eccentricità è sempre < 1 e indica di quanto l'ellisse si discosta da una circonferenza:

e "vicina" a 0 $\Rightarrow$ ellisse "quasi circonferenza"
(= 0, l'ellisse è una circonferenza)

e "vicina" a 1 $\Rightarrow$ ellisse "schiacciata"
(= 1, l'ellisse degenera in un segmento)

**16** $9x^2 + 4y^2 = 36$

Trovare fuochi, vertici, eccentricità

$$\frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{\frac{36}{9}} + \frac{y^2}{\frac{36}{4}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

FUOCHI SU ASSE $y$ (perché $b^2 > a^2$)

$$c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

FUOCHI $F_1(0, -\sqrt{5})$ $F_2(0, \sqrt{5})$

VERTICI $A_1(-2, 0)$ $A_2(2, 0)$ $B_1(0, -3)$ $B_2(0, 3)$

ECCENTRICITÀ $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

**22** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \frac{1}{3}$

$$\frac{3x^2}{9} + \frac{3y^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1 \qquad a^2 = 3 \qquad a = \sqrt{3}$$

$$b^2 = \frac{4}{3} \qquad b = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

FUOCHI SU ASSE X

(perché $a^2 > b^2$) $\quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$

FUOCHI $\quad F_1\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}, 0\right) \quad F_2\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, 0\right)$

VERTICI $\quad A_1(-\sqrt{3}, 0) \quad A_2(\sqrt{3}, 0) \quad B_1\left(0, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \quad B_2\left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

ECCENTRICITÀ $\quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

**41** Scrivi l'equazione di un'ellisse con i fuochi sull'asse $y$, asse minore di misura 4 e distanza focale uguale a 2. $\left[\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1\right]$

**In 3 passi**

ASSE MINORE $2a=4 \Rightarrow a=2$

DISTANZA FOCALE $2c=2 \Rightarrow c=1$

$a^2=b^2-c^2 \Rightarrow b^2=a^2+c^2 \Rightarrow b=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$$

**65** Data l'equazione $\frac{x^2}{1-2k}+\frac{y^2}{k+4}=1$, determina i valori da attribuire al parametro $k$ affinché rappresenti un'ellisse con i fuochi sull'asse $x$. $[-4<k<-1]$

$\begin{cases} 1-2k>0 \quad \text{(non serve)} \\ k+4>0 \\ 1-2k>k+4 \end{cases}$ $\begin{cases} k>-4 \\ -3k>3 \end{cases}$ $\begin{cases} k>-4 \\ k<-1 \end{cases}$ $\boxed{-4<k<-1}$