70 Data l'equazione $\frac{x^2}{k+2} + \frac{y^2}{1-2k} = 1$, stabilisci per quali valori di k:

a^2 b^2

a. rappresenta un'ellisse;

b. rappresenta un'ellisse con i fuochi sull'asse x ed eccentricità $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\left[a) -2 < k < \frac{1}{2}; b) k = 0\right]$

a) $\begin{cases} k+2>0 \\ 1-2k>0 \end{cases}$ $\begin{cases} k>-2 \\ -2k>-1 \end{cases}$ $\begin{cases} k>-2 \\ k<\frac{1}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{-2<k<\frac{1}{2}}$

b) $\begin{cases} k+2>1-2k & \text{(fuochi sull'asse } x\text{)} \\ -2<k<\frac{1}{2} & \text{(ellisse)} \end{cases}$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{a^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{1}{2} \qquad \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2} \qquad a^2 = 2b^2$$

$$\Downarrow$$

$$k+2 = 2(1-2k)$$

$\begin{cases} k+2>1-2k \\ -2<k<\frac{1}{2} \\ k+\cancel{2} = \cancel{2}-4k \end{cases}$ $\begin{cases} 3k>-1 \\ -2<k<\frac{1}{2} \\ k=0 \end{cases}$ $\begin{cases} k>-\frac{1}{3} \\ -2<k<\frac{1}{2} \\ k=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{k=0}$

141 Conduci da $P\left(6; -\frac{3}{2}\right)$ le tangenti all'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 9$.

$[2y + 3 = 0; 4x + 6y - 15 = 0]$

$$x^2 + 4y^2 = 9$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{4}{9}y^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1 \quad \text{EQ. CANONICA}$$

$$a^2 = 9 \quad b^2 = \frac{9}{4}$$

FASCIO DI RETTE PER $P\left(6, -\frac{3}{2}\right)$

$$y + \frac{3}{2} = m(x-6) \Rightarrow y = mx - 6m - \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} y = mx - 6m - \frac{3}{2} \\ x^2 + 4y^2 = 9 \end{cases} \qquad x^2 + 4\left(mx - 6m - \frac{3}{2}\right)^2 - 9 = 0 \quad \text{eq. risolvente}$$

$$x^2 + 4\left(m^2x^2 + 36m^2 + \frac{9}{4} - 12m^2x + 18m - 3mx\right) - 9 = 0$$

$$x^2 + 4m^2x^2 + 144m^2 + \cancel{9} - 48m^2x + 72m - 12mx - \cancel{9} = 0$$

$$(1 + 4m^2)x^2 - 2(24m^2 + 6m)x + 144m^2 + 72m = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \Rightarrow \quad (24m^2 + 6m)^2 - (1 + 4m^2)(144m^2 + 72m) = 0$$

$$\cancel{576m^4} + 36m^2 + \cancel{288m^3} - 144m^2 - 72m - \cancel{576m^4} - \cancel{288m^3} = 0$$

$$-108m^2 - 72m = 0$$

$$-36m(3m + 2) = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow m = 0 \\ \searrow m = -\frac{2}{3} \end{matrix}$$

$$y = mx - 6m - \frac{3}{2} \qquad m = 0 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{2}} \quad 1^a \text{ TANGENTE}$$

$$m = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 4 - \frac{3}{2} \qquad \boxed{y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{2}}$$

2^a TANGENTE

184 Trova l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse y, di eccentricità $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$, sapendo che passa per $(1; -\sqrt{3})$.

$$\left[\frac{x^2}{3} + \frac{2y^2}{9} = 1\right]$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

FUOCHI SU ASSE $y \Rightarrow e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{cases} \frac{b^2-a^2}{b^2} = \frac{1}{3} \\ \frac{1^2}{a^2} + \frac{(-\sqrt{3})^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$ ← passaggio per $(1, -\sqrt{3})$

$b^2 > a^2$

$$\begin{cases} 1 - \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{a^2}{b^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow a^2 = \frac{2}{3}b^2 \\ \frac{b^2+3a^2}{\cancel{a^2b^2}} = \frac{a^2b^2}{\cancel{a^2b^2}} \end{cases}$$

SOSTITUISCO

$$b^2 + \cancel{3} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} b^2 = \frac{2}{3} b^2 \cdot b^2$$

$$3\cancel{b^2} = \frac{2}{3} b^{\cancel{4}\,2}$$

perché $b^2 \neq 0$

$$\begin{cases} b^2 = \frac{9}{2} \\ a^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2} = 3 \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{\frac{9}{2}} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{3} + \frac{2y^2}{9} = 1}$$