143 Determina le equazioni delle rette tangenti all'ellisse di equazione $x^2 + 2y^2 = 9$, condotte da $P(-9; 0)$. $[x + 4y + 9 = 0; x - 4y + 9 = 0]$

fascio per $P(-9, 0) \Rightarrow \quad y = m(x+9) \qquad y = mx + 9m$

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 9 \\ y = mx + 9m \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + 2(mx + 9m)^2 - 9 = 0$$

$$x^2 + 2(m^2x^2 + 81m^2 + 18m^2x) - 9 = 0$$

$$x^2 + 2m^2x^2 + 162m^2 + 36m^2x - 9 = 0$$

$$(1 + 2m^2)x^2 + 36m^2x + 162m^2 - 9 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \Rightarrow (18m^2)^2 - (1 + 2m^2)(162m^2 - 9) = 0$$

$$\cancel{324m^4} - 162m^2 + 9 - \cancel{324m^4} + 18m^2 = 0$$

$$-144m^2 = -9$$

$$m^2 = \frac{9}{144} \Rightarrow m^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow m = \pm\frac{1}{4}$$

$$m = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{9}{4} \qquad \boxed{x + 4y + 9 = 0}$$

$$m = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4} \qquad \boxed{x - 4y + 9 = 0}$$

146 Trova il valore di k affinché l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{k+6}+\frac{y^2}{1-k}=1$ sia tangente alla retta di equazione $y=-2x+4$. $[k=-3]$

$$\begin{cases} k+6>0 \\ 1-k>0 \end{cases} \quad \begin{cases} k>-6 \\ k<1 \end{cases} \Rightarrow -6<k<1$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{k+6}+\frac{y^2}{1-k}=1 \\ y=-2x+4 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{k+6}+\frac{(-2x+4)^2}{1-k}=1$$

$$\frac{(1-k)x^2+(k+6)(-2x+4)^2}{\cancel{(k+6)(1-k)}}=\frac{(k+6)(1-k)}{\cancel{(k+6)(1-k)}}$$

$$(1-k)x^2+(k+6)(4x^2+16-16x)=k-k^2+6-6k$$

$$(1-k)x^2+4kx^2+16k-16kx+24x^2+96-96x-k+k^2-6+6k=0$$

$$(1-k+4k+24)x^2-2(8k+48)x+k^2+21k+90=0$$

$$(25+3k)x^2-2(8k+48)x+k^2+21k+90=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=0 \Rightarrow (8k+48)^2-(25+3k)(k^2+21k+90)=0$$

$$64k^2+2304+768k-25k^2-525k-2250-3k^3-63k^2-270k=0$$

$$-3k^3-24k^2-27k+54=0 \Rightarrow k^3+8k^2+9k-18=0$$

$k=1 \Rightarrow 1^3+8\cdot1^2+9\cdot1-18=0$ ok.

	1	8	9	-18
1		1	9	18
	1	9	18	//

$$(k-1)(k^2+9k+18)=0$$

$(k-1)(k^2+9k+18)=0$

$k^2+9k+18=0 \qquad \Delta = 9^2-4\cdot 18 = 9$

$k = \dfrac{-9\pm 3}{2} = \begin{cases} -6 \\ -3 \end{cases}$

$\underset{\text{NON ACC.}}{k=1} \quad \vee \quad k=-3 \quad \vee \quad \underset{\text{NON ACC.}}{k=-6} \qquad\qquad -6<k<1$

Unica soluzione $\boxed{k=-3}$

164 Trova l'equazione dell'ellisse avente un fuoco in $\left(\frac{3}{2};0\right)$ e il semiasse su cui non giace il fuoco di misura $\frac{\sqrt{7}}{2}$. $[7x^2+16y^2=28]$

FUOCHI → SU ASSE $x \Rightarrow a^2-b^2=c^2$

$b=\frac{\sqrt{7}}{2}$

$F_2\left(\frac{3}{2},0\right) \Rightarrow c=\frac{3}{2}$

$a^2=b^2+c^2=\frac{7}{4}+\frac{9}{4}=\frac{16}{4}=4$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{7}{4}}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{4y^2}{7}=1$$

$$\boxed{7x^2+16y^2=28}$$

175 Determina l'equazione dell'ellisse di eccentricità $e=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ e avente un fuoco nel punto $(0;4)$. $\left[\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{20}=1\right]$

$F_2(0,4) \Rightarrow$ FUOCHI SU ASSE y

$\Downarrow$

$c=4$

$\Downarrow$

$b^2=a^2+c^2$

$e=\frac{c}{b}$

$\Downarrow$

$$b=\frac{c}{e}=\frac{4}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\cdot 5}{\cancel{2}\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

$b^2=4\cdot 5=20$

$a^2=b^2-c^2=20-16=4$

$$\boxed{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{20}=1}$$

Scrivi l'equazione dell'ellisse passante per i punti *A* e *B* indicati.

167 $A\left(-1; \frac{8}{3}\right), B\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}; 2\right).$ $\left[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1\right]$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \frac{1}{a^2}=K \qquad \frac{1}{b^2}=t$$

$$\Downarrow$$

$$Kx^2+ty^2=1$$

$A\left(-1,\frac{8}{3}\right)$

$B\left(\frac{3}{2}\sqrt{2},2\right)$

$$\begin{cases} K+\frac{64}{9}t=1 \\ \frac{9}{2}K+4t=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} K=1-\frac{64}{9}t \\ \frac{9}{2}\left(1-\frac{64}{9}t\right)+4t=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} // \\ \frac{9}{2}-32t+4t=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ -28t=1-\frac{9}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} // \\ -28t=-\frac{7}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} K=1-\frac{\cancel{64}^{8}}{9}\cdot\frac{1}{\cancel{8}}=\frac{1}{9} \\ t=\frac{\cancel{7}^{1}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{28}_{4}}=\frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{9} \qquad \frac{1}{b^2}=\frac{1}{8} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1}$$

176 Determina l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x di eccentricità $\frac{1}{2}$ e con un vertice in $(0; -\sqrt{3})$. $[3x^2 + 4y^2 = 12]$

$B_1(0, -\sqrt{3}) \Rightarrow b = \sqrt{3}$ $\quad e = \frac{c}{a}$ $\quad c = \frac{1}{2}a$

fuochi su asse x $\quad c^2 = a^2 - b^2$

$$\frac{1}{4}a^2 = a^2 - 3$$

$$\frac{1}{4}a^2 - a^2 = -3$$

$$-\frac{3}{4}a^2 = -3 \Rightarrow a^2 = 4$$

$$\boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1}$$

185 Scrivi l'equazione dell'ellisse che nel suo punto di ascissa 1 ha per tangente la retta di equazione $x + 6\sqrt{2}y - 9 = 0$. $\left[\frac{x^2}{9} + y^2 = 1\right]$

Il punto di tangenza $T(1, y_T)$

lo trovo sostituendo $x = 1$ nella retta (che passa per T)

$1 + 6\sqrt{2}y - 9 = 0 \qquad 6\sqrt{2}y = 8$

$y = \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{6}_{3}\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

$\Rightarrow T\left(1, \frac{2}{3}\sqrt{2}\right)$

L'ellisse cercata passa per T: $\quad \alpha x^2 + \beta y^2 = 1 \qquad \alpha = \frac{1}{a^2} \quad \beta = \frac{1}{b^2}$

$\Rightarrow$ SOSTITUISCO $T\left(1, \frac{2}{3}\sqrt{2}\right) \qquad \alpha + \frac{8}{9}\beta = 1$

Uso la condizione di tangenza:

$$\begin{cases} \alpha x^2 + \beta y^2 = 1 \\ x + 6\sqrt{2}y - 9 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha(9 - 6\sqrt{2}y)^2 + \beta y^2 = 1 \\ x = 9 - 6\sqrt{2}y \end{cases}$$

$\alpha(81 + 72y^2 - 108\sqrt{2}y) + \beta y^2 = 1$

$81\alpha + 72\alpha y^2 - 108\sqrt{2}\alpha y + \beta y^2 - 1 = 0$

$(72\alpha + \beta)y^2 - 108\sqrt{2}\alpha y + 81\alpha - 1 = 0$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (54\sqrt{2}\alpha)^2 - (72\alpha + \beta)(81\alpha - 1) = 0 \\ \alpha + \frac{8}{9}\beta = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (54\sqrt{2}\alpha)^2 - (72\alpha + \beta)(81\alpha - 1) = 0 \\ \alpha + \frac{8}{9}\beta = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5832\alpha^2 - \left(72\alpha + \frac{9}{8} - \frac{9}{8}\alpha\right)(81\alpha - 1) = 0 \\ \beta = \frac{9}{8}(1-\alpha) = \frac{9}{8} - \frac{9}{8}\alpha \end{cases}$$

$$5832\alpha^2 - \left(\frac{567}{8}\alpha + \frac{9}{8}\right)(81\alpha - 1) = 0$$

$$5832\alpha^2 - \frac{45927}{8}\alpha^2 + \frac{567}{8}\alpha - \frac{729}{8}\alpha + \frac{9}{8} = 0$$

$$729\alpha^2 - 162\alpha + 9 = 0$$

$$81\alpha^2 - 18\alpha + 1 = 0 \qquad (9\alpha - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{9} \qquad \beta = \frac{9}{8} - \frac{9}{8}\alpha = \frac{9}{8} - \frac{9}{8}\cdot\frac{1}{9} = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{9} + y^2 = 1}$$

184 Trova l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse y, di eccentricità $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$, sapendo che passa per $(1; -\sqrt{3})$. $\left[\frac{x^2}{3} + \frac{2y^2}{9} = 1\right]$

$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{3} b$$

$$b^2 = a^2 + c^2$$

$$a^2 = b^2 - c^2 = b^2 - \frac{1}{3} b^2 = \frac{2}{3} b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{2}{3} b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{3}{2} \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{3}{2} x^2 + y^2 = b^2$$

passa per $(1, -\sqrt{3}) \Rightarrow \frac{3}{2} + 3 = b^2 \Rightarrow b^2 = \frac{9}{2}$

$$a^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2} = 3$$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{\frac{9}{2}} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{3} + \frac{2y^2}{9} = 1}$$