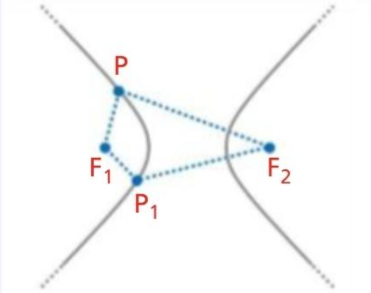
IPERBOLE NEL PIANO (RIF. CANONICO)

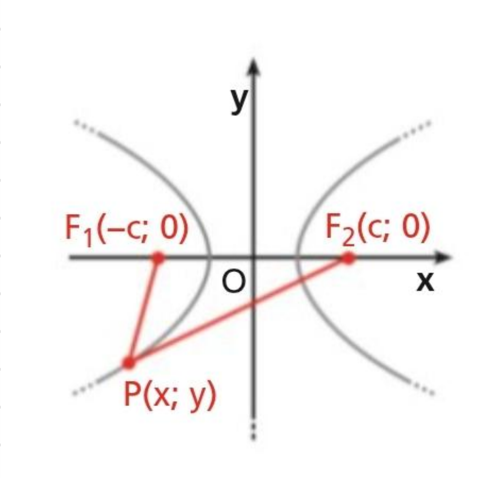
DEFINIZIONE

Assegnati nel piano due punti, F_1 e F_2, si chiama **iperbole** il luogo geometrico dei punti P del piano che hanno costante la differenza delle distanze da F_1 e da F_2:

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = \text{costante}.$$



$\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = \overline{P_1F_2} - \overline{P_1F_1}$



C = SEMIDISTANZA FOCALE

$F_1(-c,0) \qquad F_2(c,0)$

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$$

Dall'esame del triangolo PF_1F_2, si ha $2a < 2c$

DIFFERENZA DI 2 LATI — TERZO LATO

$\Downarrow$

$a < c$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 + (x-c)^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{c^2}+2cx+\cancel{y^2} = 4a^2+\cancel{x^2}+\cancel{c^2}-2cx+\cancel{y^2} \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\cancel{4}cx - \cancel{4}a^2 = \pm \cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$c^2x^2+a^4-2a^2cx = a^2\left[x^2+c^2-2cx+y^2\right]$$

$$c^2x^2+a^4 \cancel{-2a^2cx} = a^2x^2+c^2a^2 \cancel{-2a^2cx} + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = c^2a^2 - a^4$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = c^2a^2 - a^4$$

$$x^2(c^2-a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

$c > a$

$c^2 > a^2$

$c^2 - a^2 > 0$

$c^2 - a^2 = b^2$

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

divido per a^2b^2

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

EQUAZIONE CANONICA DELL'IPERBOLE

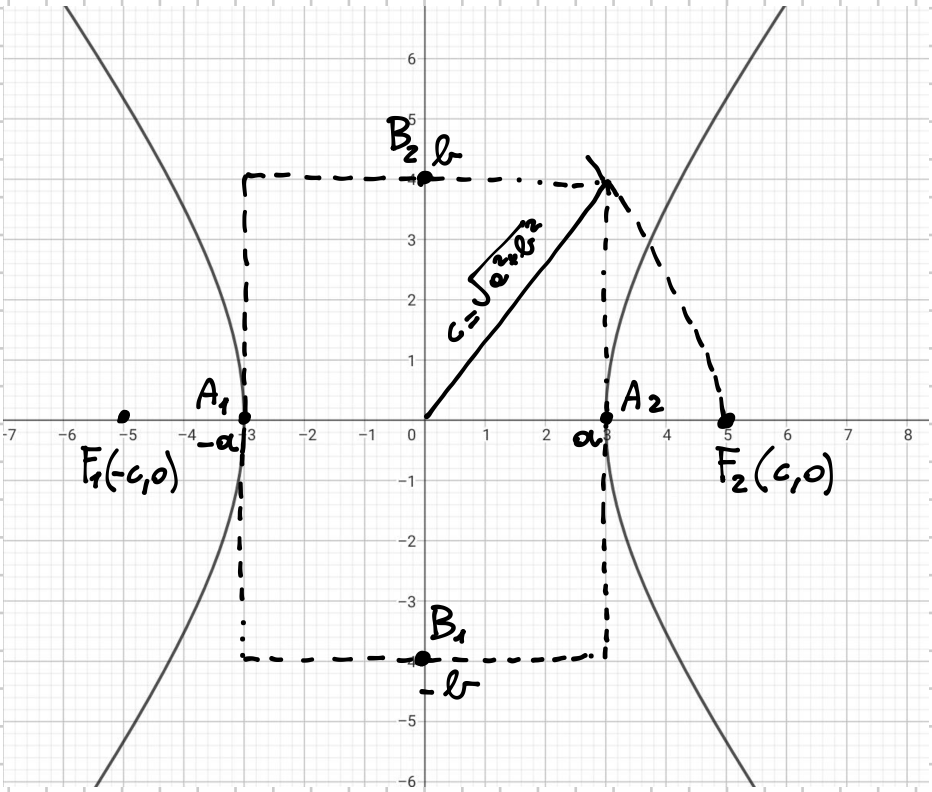
$c^2 = a^2 + b^2$

Nel procedimento abbiamo elevato 2 volte al quadrato. Ciò significa che saremmo pervenuti alla stessa equazione anche a partire dalle relazioni:

$$-\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$$

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

ma non ci sono punti del piano che soddisfano queste 2 uguaglianze: nella prima i 2 membri hanno segni opposti; nella seconda, interpretando $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ come la somma dei 2 lati del triangolo PF_1F_2, dovremmo avere $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} > \overline{F_1F_2}$, cioè $2a > 2c$, mentre si è supposto che $a < c$.



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$a^2+b^2=c^2$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

a = SEMIASSE TRASVERSO

$A_2(a,0)$ $A_1(-a,0)$

VERTICI DELL'IPERBOLE (REALI)

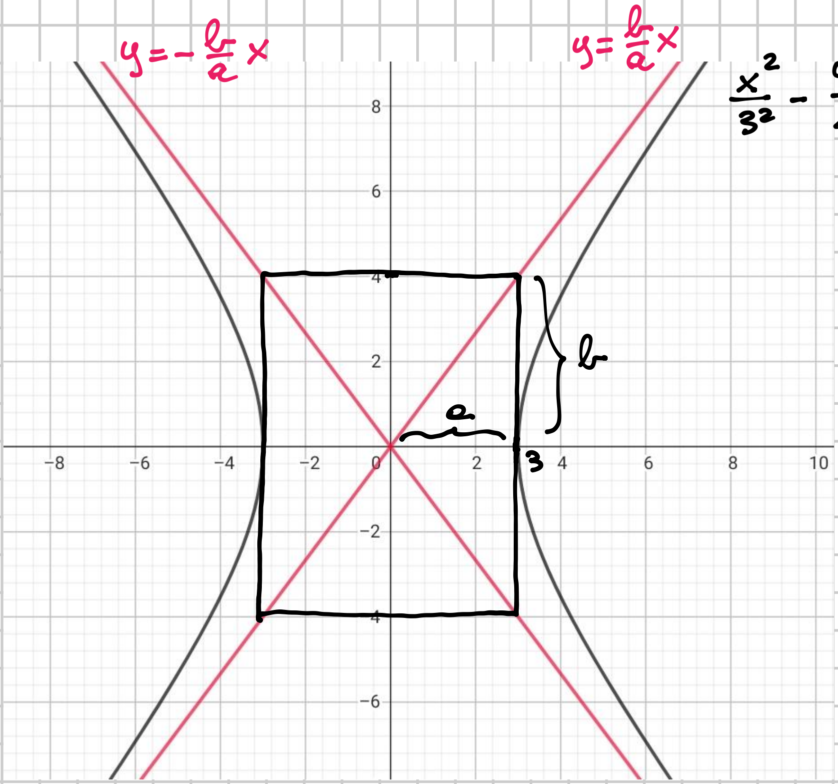
$B_2(0,b)$ $B_1(0,-b)$

VERTICI (NON REALI) DELL'IPERBOLE

FUOCHI $F_1(-c,0)$ $F_2(c,0)$ b = SEMIASSE NON TRASVERSO

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a$$

$A_1(-a,0)$
$A_2(a,0)$
VERTICI REALI



$$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$$

$y=\frac{b}{a}x$ $y=-\frac{b}{a}x$

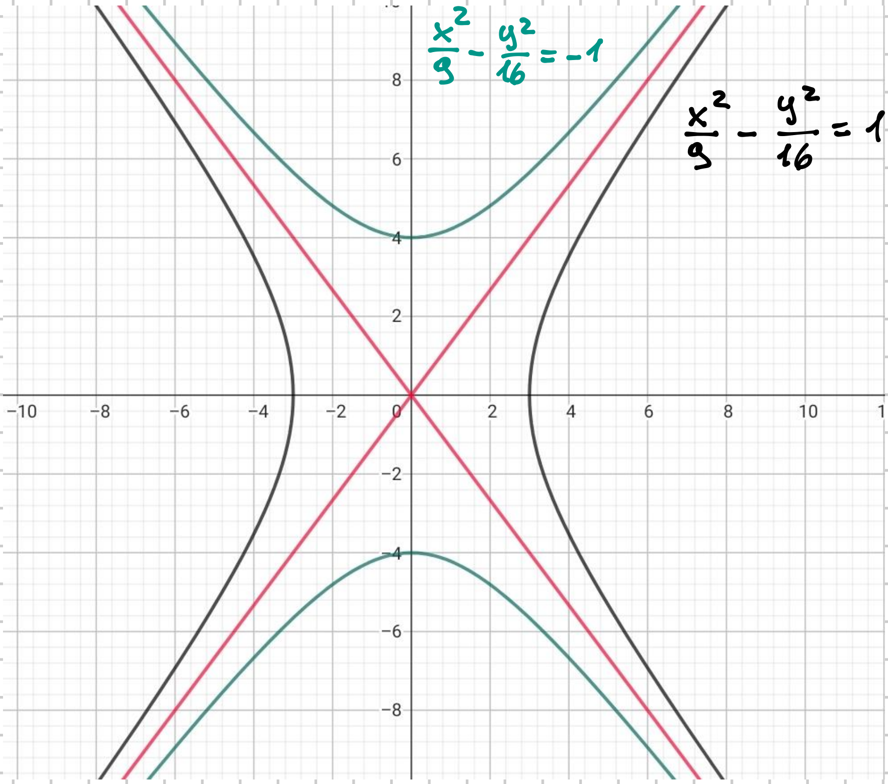
ASINTOTI DELL'IPERBOLE

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1$$

$$y^2=b^2\,\frac{x^2-a^2}{a^2}$$

$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ per $|x|$ "grande" $\sqrt{x^2-a^2}\simeq|x|$ $\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\simeq\frac{b}{a}|x|$



ASINTOTI $y = \pm \frac{4}{3}x$

per entrambe

ECCENTRICITÀ DELL'IPERBOLE

$$e = \frac{\text{SEMIDISTANZA FOCALE}}{\text{SEMIASSE TRASVERSO}}$$

$$\boxed{e > 1}$$

$e = \frac{c}{a}$ FUOCHI SU ASSE x

$e = \frac{c}{b}$ FUOCHI SU ASSE y