72 Determina i valori di k affinché l'equazione $\frac{x^2}{3-k}+\frac{y^2}{4k+3}=1$ rappresenti:

a. un'iperbole;

b. un'iperbole con i fuochi sull'asse y;

c. un'iperbole con un fuoco di coordinate $(0; -2\sqrt{5})$;

d. un'iperbole che passa per il punto $(3; 2)$.

$\left[\text{a) } k<-\frac{3}{4} \vee k>3; \text{ b) } k>3; \text{ c) } k=4; \text{ d) } k=-2, k=-\frac{15}{4}\right]$

a) $\begin{cases} 3-K>0 \\ 4K+3<0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3-K<0 \\ 4K+3>0 \end{cases}$

fuochi su asse x — fuochi su asse y

infatti, se moltiplico per -1:

$$\frac{x^2}{-(3-K)}-\frac{y^2}{4K+3}=-1$$

$\begin{cases} K<3 \\ K<-\frac{3}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} K>3 \\ K>-\frac{3}{4} \end{cases}$

$$\boxed{K<-\frac{3}{4} \quad \vee \quad K>3}$$

b) fuochi su asse y $\Rightarrow \boxed{K>3}$

c) $F_1(0,-2\sqrt{5})$ sull'asse y, quindi $K>3$

$C=2\sqrt{5}$ $\qquad a^2+b^2=c^2$

Se l'iperbole ha i fuochi sull'asse y deve essere nella forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \Rightarrow \frac{x^2}{\underbrace{K-3}_{a^2}}-\frac{y^2}{\underbrace{4K+3}_{b^2}}=-1$

$$\begin{cases} K-\cancel{3}+4K+\cancel{3}=(2\sqrt{5})^2 \\ K>3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5K=20 \\ K>3 \end{cases} \quad \begin{cases} K=4 \\ K>3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{K=4}$$

d) $P(3,2)$ $\xrightarrow{\text{SOSTITUISCO}}$ $\frac{x^2}{3-K}+\frac{y^2}{4K+3}=1$ $\qquad K<-\frac{3}{4} \vee K>3$

$$\frac{9}{3-K}+\frac{4}{4K+3}=1$$

$$\frac{9(4K+3)+4(3-K)}{\cancel{(3-K)(4K+3)}}=\frac{(3-K)(4K+3)}{\cancel{(3-K)(4K+3)}}$$

$$36K+27+12-4K=12K+9-4K^2-3K$$

$$4K^2+23K+30=0 \qquad \Delta=23^2-4\cdot4\cdot30=529-480=49=7^2$$

$$K=\frac{-23\pm7}{8}= \begin{cases} -\frac{30}{8}=-\frac{15}{4} \\ -\frac{16}{8}=-2 \end{cases}$$

entrambe accettabili perché $K<-\frac{3}{4} \vee K>3$

$$\boxed{K=-2 \vee K=-\frac{15}{4}}$$

116 Determina su quali rette passanti per l'origine l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{36} = 1$ stacca una corda di misura 3. $\left[y = \pm\sqrt{\frac{2}{17}}x\right]$

$$\begin{cases} y = mx \\ \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{36} = 1 \end{cases} \Rightarrow 18x^2 - y^2 = 36$$

$$18x^2 - (mx)^2 = 36$$

$$18x^2 - m^2x^2 = 36$$

$$x^2(18 - m^2) = 36 \Rightarrow x^2 = \frac{36}{18 - m^2}$$

$$x = \pm\frac{6}{\sqrt{18 - m^2}}$$

I 2 PUNTI DI INTERSEZIONE DELLA RETTA CON L'IPERBOLE SONO:

$$P\left(\frac{6}{\sqrt{18-m^2}}, \frac{6m}{\sqrt{18-m^2}}\right) \qquad Q\left(-\frac{6}{\sqrt{18-m^2}}, -\frac{6m}{\sqrt{18-m^2}}\right)$$

$$\overline{PQ} = 3 \Leftrightarrow \overline{PQ}^2 = 9$$

$$\left(\frac{6}{\sqrt{18-m^2}} + \frac{6}{\sqrt{18-m^2}}\right)^2 + \left(\frac{6m}{\sqrt{18-m^2}} + \frac{6m}{\sqrt{18-m^2}}\right)^2 = 9$$

$$\left(\frac{12}{\sqrt{18-m^2}}\right)^2 + \left(\frac{12m}{\sqrt{18-m^2}}\right)^2 = 9$$

$$\frac{144 + 144m^2}{18 - m^2} = 9 \qquad \overset{16}{\cancel{144}}(1 + m^2) = \cancel{9} \cdot (18 - m^2)$$

$$16 + 16m^2 = 18 - m^2$$

$$17m^2 = 2 \qquad m = \pm\sqrt{\frac{2}{17}}$$

$$\boxed{y = \pm\sqrt{\frac{2}{17}}x}$$