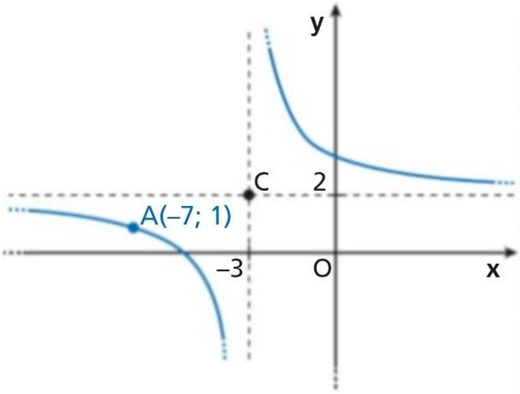
67 **a.** Determina l'equazione della funzione omografica rappresentata nella figura.

b. Scrivi l'equazione della circonferenza avente centro in C e raggio $2\sqrt{2}$.

c. Trova le intersezioni tra l'iperbole e la circonferenza e individua le tangenti nei punti comuni.

d. Indica con F_1 e F_2 i fuochi F_1 e F_2 dell'iperbole e calcola l'area del triangolo AF_1F_2.



[a) $y = \dfrac{2x+10}{x+3}$; b) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 5 = 0$; c) $(-1; 4), (-5; 0)$, $y = -x + 3$, $y = -x - 5$; d) $6\sqrt{2}$]

a) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

$c \neq 0$ (altrimenti sarebbe una retta)

$C(-3, 2) \Rightarrow \dfrac{a}{c} = 2$

ASINTOTO VERTICALE $x = -\dfrac{d}{c} \Rightarrow -\dfrac{d}{c} = -3$

$$\begin{cases} a = 2c \\ d = 3c \end{cases}$$

Sostituisco $A(-7, 1)$ nell'equazione $\Rightarrow 1 = \dfrac{-7a+b}{-7c+d}$

$\Rightarrow -7c + d = -7a + b$

$$\begin{cases} a = 2c \\ d = 3c \\ -7c + d = -7a + b \end{cases}$$

scrivo in funzione di c

$$\begin{cases} a = 2c \\ d = 3c \\ b = 7a - 7c + d = \\ \quad = 14c - 7c + 3c = 10c \end{cases}$$

PONGO $c = 1$

$$\begin{cases} a = 2 \\ d = 3 \\ b = 10 \end{cases}$$

$$\boxed{y = \dfrac{2x+10}{x+3}}$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$

b) $C = (-3, 2)$ $r = 2\sqrt{2}$

$(x+3)^2 + (y-2)^2 = (2\sqrt{2})^2$

$x^2 + 9 + 6x + y^2 + 4 - 4y - 8 = 0$

$$\boxed{x^2 + y^2 + 6x - 4y + 5 = 0}$$

c) $\begin{cases} y = \dfrac{2x+10}{x+3} = \dfrac{2(x+5)}{x+3} = \dfrac{2(x+3+2)}{x+3} = \dfrac{2(x+3)+4}{x+3} = \\ x^2+y^2+6x-4y+5=0 \end{cases}$

$$= \frac{2\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}} + \frac{4}{x+3} =$$

$$= 2 + \frac{4}{x+3}$$

$$x^2 + \left(2+\frac{4}{x+3}\right)^2 + 6x - 4\left(2+\frac{4}{x+3}\right) + 5 = 0$$

$$x^2 + 4 + \frac{16}{(x+3)^2} + \cancel{\frac{16}{x+3}} + 6x - 8 - \cancel{\frac{16}{x+3}} + 5 = 0$$

$$x^2 + \frac{16}{(x+3)^2} + 6x + 1 = 0$$

$$x^2(x+3)^2 + 16 + 6x(x+3)^2 + (x+3)^2 = 0$$

$$x^2(x^2+9+6x) + 16 + 6x(x^2+9+6x) + x^2+9+6x = 0$$

$$x^4 + 9x^2 + 6x^3 + 16 + 6x^3 + 54x + 36x^2 + x^2 + 9 + 6x = 0$$

$$x^4 + 12x^3 + 46x^2 + 60x + 25 = 0$$

$x=-1$ $\quad 1 - 12 + 46 - 60 + 25 = 0$ ok!

	1	12	46	60	25
-1		-1	-11	-35	-25
	1	11	35	25	//
-1		-1	-10	-25	
	1	10	25	//	

$$(x+1)^2(x^2+10x+25) = 0$$

$$(x+1)^2(x+5)^2 = 0$$

$\begin{cases} x=-1 \\ y = \dfrac{-2+10}{-1+3} = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=-5 \\ y=0 \end{cases}$

$A(-1,4)$ $\quad B(-5,0)$

punti di intersezione

La circonferenza è TANGENTE ALL'IPERBOLE $\Rightarrow$ le tangenti sono COMUNI

Trovo le tangenti alla circonferenza nei punti $A(-1,4)$ e $B(-5,0)$

$$x^2+y^2+6x-4y+5=0 \qquad C(-3,2) \qquad r=2\sqrt{2}$$

$$y-4=m(x+1) \Rightarrow y-4=mx+m \qquad mx-y+m+4=0$$

$$\frac{|-3m-2+m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=2\sqrt{2}$$

$$|-2m+2|=2\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$$

$$4m^2+4-8m=8m^2+8 \qquad 4m^2+8m+4=0$$

$$m^2+2m+1=0 \Rightarrow m=-1$$

1^a TANGENTE $\quad y-4=-x-1$

$$\boxed{y=-x+3}$$

$$y=mx+5m \qquad mx-y+5m=0$$

$$\frac{|-3m-2+5m|}{\sqrt{m^2+1}}=2\sqrt{2}$$

$$|2m-2|=2\sqrt{2}\sqrt{m^2+1} \qquad 4m^2+4-8m=8m^2+8$$

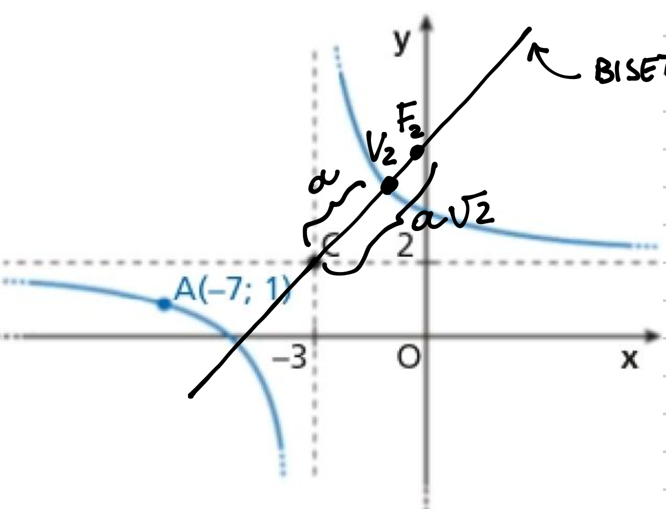
$$4m^2+8m+4=0$$

$$m^2+2m+1=0 \qquad (m+1)^2=0$$

$$m=-1$$

2^a TANGENTE $\quad \boxed{y=-x-5}$

d)



← BISETTRICE degli angoli formati dagli asintoti: i fuochi stanno su questa retta a distanza ⇒ coeff. angolare $m=1$

$C(-3, 2)$

$y-2 = x+3 \Rightarrow y = x+5$

eq. dell'ASSE TRASVERSO

Il valore $a = \overline{CV_2}$ è il raggio della circonferenza con centro C e tangente all'iperbole: $a = 2\sqrt{2}$

Quindi la semidistanza focale è $a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 4$.

Per trovare i 2 fuochi interseco la retta $y = x+5$ con la circonferenza di centro C e raggio 4: $(x+3)^2+(y-2)^2 = 16$

$$\begin{cases}(x+3)^2+(y-2)^2=16\\ y=x+5\end{cases} \Rightarrow (x+3)^2+(x+5-2)^2=16$$

$$(x+3)^2+(x+3)^2=16$$

$$2(x+3)^2=16$$

$$(x+3)^2=8 \Rightarrow x+3=\pm 2\sqrt{2}$$

$$x=-3\pm 2\sqrt{2}$$

$$F_1:\begin{cases}x=-3-2\sqrt{2}\\ y=2-2\sqrt{2}\end{cases} \qquad F_2:\begin{cases}x=-3+2\sqrt{2}\\ y=2+2\sqrt{2}\end{cases}$$

$F_1(-3-2\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2})$ $F_2(-3+2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2})$ $A(-7, 1)$

$F_1(-3-2\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2})$ $F_2(-3+2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2})$ $A(-7, 1)$

Area del triangolo F_1F_2A

BASE $= \overline{F_1F_2} = 8$ ALTEZZA = DISTANZA DI A DALLA RETTA $y = x + 5$

$$\Downarrow$$

$$x - y + 5 = 0$$

$$h = \frac{|-7-1+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

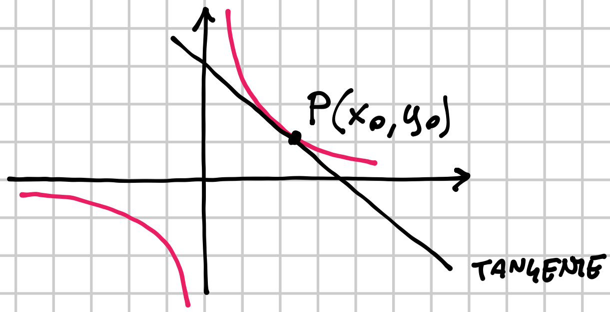
$$\mathcal{A} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

84 Dimostra che la tangente a un'iperbole equilatera del tipo $xy = k$ in un suo punto $P(x_0; y_0)$ ha equazione:

$$\frac{xy_0 + x_0 y}{2} = k.$$

$x_0 y_0 = K \Rightarrow y_0 = \frac{K}{x_0}$

perché $P \in$ IPERBOLE



$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$\Downarrow$$
$$y = m(x - x_0) + y_0$$
$$\Downarrow$$
$$y = m(x - x_0) + \frac{K}{x_0}$$

$$\begin{cases} y = m(x - x_0) + \frac{K}{x_0} \\ y = \frac{K}{x} \end{cases}$$

$$\frac{K}{x} = m(x - x_0) + \frac{K}{x_0}$$

MOLTIPLICO PER $x \neq 0$

$$K = mx(x - x_0) + \frac{Kx}{x_0}$$

$$mx^2 - mx_0 x + \frac{K}{x_0}x - K = 0 \qquad mx^2 + \left(\frac{K}{x_0} - mx_0\right)x - K = 0$$

PONGO $\Delta = 0$

$$\left(\frac{K}{x_0} - mx_0\right)^2 + 4mK = 0 \qquad \frac{K^2}{x_0^2} + m^2 x_0^2 - 2Km + 4Km = 0$$

INCOGNITA m

$$x_0^2 m^2 + 2Km + \frac{K^2}{x_0^2} = 0$$

$$\left(x_0 m + \frac{K}{x_0}\right)^2 = 0$$

$$x_0 m + \frac{K}{x_0} = 0 \qquad m = -\frac{K}{x_0^2}$$

TANGENTE

$\hookrightarrow y = -\frac{K}{x_0^2}(x - x_0) + \frac{K}{x_0}$

$$y = -\frac{K}{x_0^2}x + \frac{K}{x_0} + \frac{K}{x_0}$$

$$y = -\frac{K}{x_0^2}x + 2\frac{K}{x_0}$$

$$\frac{x_0^2 y}{\cancel{x_0^2}} = \frac{-Kx + 2Kx_0}{\cancel{x_0^2}}$$

$$x_0^2 y + Kx = 2Kx_0$$

$$\frac{\cancel{x_0^2} y}{2\cancel{x_0}} + \frac{Kx}{2x_0} = K \qquad x_0 y_0 = K$$

$$\frac{x_0 y}{2} + \frac{\cancel{x_0} y_0 x}{2\cancel{x_0}} = K$$

$$\boxed{\frac{x_0 y + y_0 x}{2} = K}$$