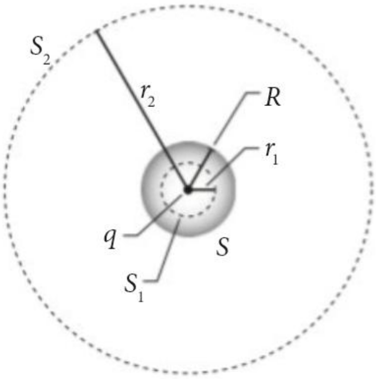
57 ◆◆◆ Una carica puntiforme $q = 1{,}5 \times 10^{-8}$ C è posta nel vuoto. Considera la superficie equipotenziale sferica S, centrata in q, di raggio $R = 10$ m. Il potenziale è nullo nei punti posti a distanza infinita da q.



▶ Calcola i raggi r_1 e r_2, con $r_1 < r_2$, di due superfici equipotenziali S_1 e S_2 tali che la differenza di potenziale tra S_1 e S sia uguale alla differenza di potenziale tra S e S_2 e sia pari a $\Delta V = 10$ V.

[5,7 m; 39 m]

$$V_1 - V = k_0 \frac{q}{r_1} - k_0 \frac{q}{R} =$$

$$= k_0 q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R} \right)$$

$$V - V_2 = k_0 q \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$V - V_2 = V_1 - V$$

$$\cancel{k_0 q} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R} \right) = \cancel{k_0 q} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{2}{R} \\ k_0 q \left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{R} \right) = \overbrace{\Delta V}^{=10V} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{r_1} = \frac{\Delta V}{k_0 q} + \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow r_1 = \left(\frac{\Delta V}{k_0 q} + \frac{1}{R} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{10\,V}{\left(8{,}99 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}\right)\left(1{,}5 \times 10^{-8} C\right)} + \frac{1}{10\,m} \right)^{-1} =$$

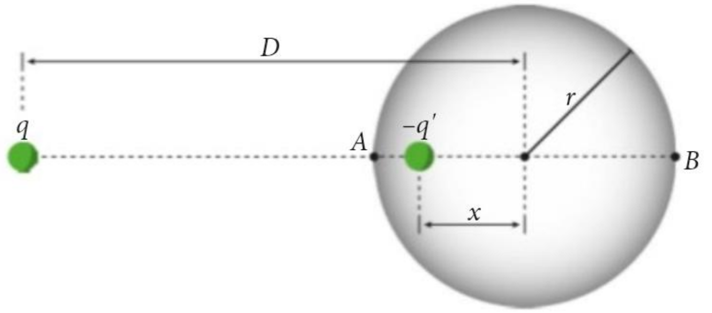
$$= 5{,}74196\ldots\ m \simeq \boxed{5{,}7\ m}$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{2}{R} - \frac{1}{r_1}$$

$$r_2 = \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{r_1} \right)^{-1} = \left(\frac{2}{10\,m} - \frac{1}{5{,}74196\ldots\ m} \right)^{-1} = 38{,}694\ldots\ m$$

$$\simeq \boxed{39\ m}$$

59 Una carica $q = 1{,}0 \times 10^{-9}$ C nel vuoto ha una distanza $D = 1{,}0$ m dal centro di una sfera di raggio $r = 30$ cm. Considera la retta congiungente la carica con il centro della sfera.



- A che distanza x dal centro della sfera sulla retta deve essere posta una carica negativa $-q'$ affinché il potenziale del sistema di due cariche si annulli nei punti A e B?
- Calcola il valore assoluto della carica $-q'$.

[9,0 cm ; $3{,}0 \times 10^{-10}$ C]

$$V_A = V_B = 0$$

$$\cancel{k_0}\frac{q}{D-r} + \cancel{k_0}\frac{-q'}{r-x} = \cancel{k_0}\frac{q}{D+r} + \cancel{k_0}\frac{-q'}{r+x}$$

$$\begin{cases} \dfrac{q}{D-r} - \dfrac{q'}{r-x} = \dfrac{q}{D+r} - \dfrac{q'}{r+x} \\[2ex] \dfrac{q}{D-r} - \dfrac{q'}{r-x} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{q}{D-r} = \frac{q'}{r-x} \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{q'} = \frac{D-r}{r-x}$$

$$\frac{q}{D-r} - \frac{q}{D+r} = \frac{q'}{r-x} - \frac{q'}{r+x} \qquad q\left(\frac{1}{D-r} - \frac{1}{D+r}\right) = q'\left(\frac{1}{r-x} - \frac{1}{r+x}\right)$$

$$\frac{q}{q'}\left(\frac{1}{D-r} - \frac{1}{D+r}\right) = \frac{1}{r-x} - \frac{1}{r+x}$$

$$\frac{D-r}{r-x}\left(\frac{1}{D-r} - \frac{1}{D+r}\right) = \frac{1}{r-x} - \frac{1}{r+x}$$

$$(D-r)\left(\frac{1}{D-r} - \frac{1}{D+r}\right) = (r-x)\left(\frac{1}{r-x} - \frac{1}{r+x}\right)$$

$$\cancel{1} - \frac{D-r}{D+r} = \cancel{1} - \frac{r-x}{r+x}$$

$r = 0{,}30$ m $\quad D = 1{,}0$ m

$$(r+x)(D-r) = (r-x)(D+r)$$

$$(0{,}3+x)\cdot 0{,}7 = (0{,}3-x)\cdot 1{,}3$$

$$(0,3+x)\cdot 0,7 = (0,3-x)\cdot 1,3$$

$$0,21 + 0,7x = 0,39 - 1,3x$$

$$2x = 0,18 \qquad x = 0,090\,m = \boxed{9,0\ cm}$$

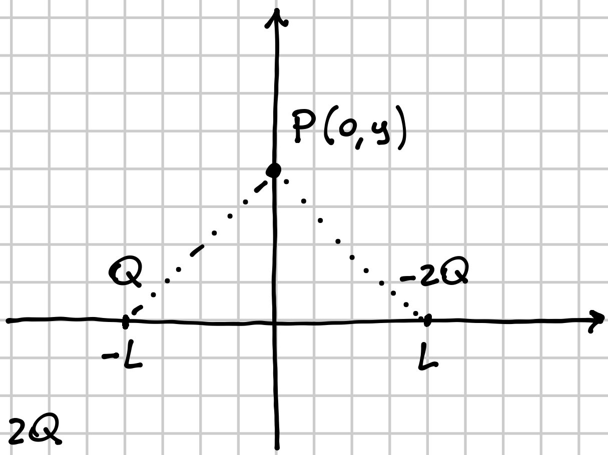
$$\frac{q}{q'} = \frac{D-r}{r-x} \Rightarrow q' = q\,\frac{r-x}{D-r} = (1,0\times 10^{-9}\,C)\cdot\frac{0,21\,m}{0,70\,m} =$$

$$= \boxed{3,0\times 10^{-10}\ C}$$

46 **TROVA LA FORMULA** In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, due cariche puntiformi $Q_A = Q$ e $Q_B = -2Q$ $(Q > 0)$ si trovano rispettivamente nei punti $A\,(-L; 0)$ e $B\,(L; 0)$ con $L > 0$.

▶ Con la solita convenzione sulla condizione di zero, determina il potenziale elettrico nei punti $P\,(0; y)$ dell'asse delle ordinate.

$[-Q/(4\pi\varepsilon_0\sqrt{L^2+y^2})]$

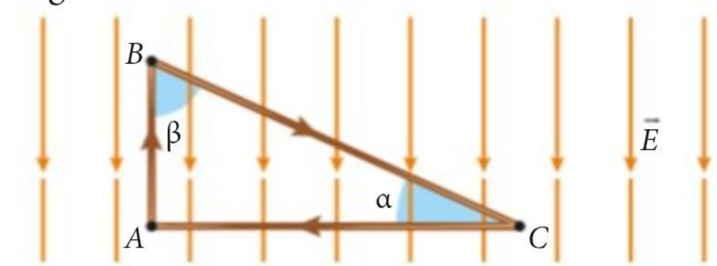


$$V_P = V_P^{(A)} + V_P^{(B)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{L^2+y^2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2Q}{\sqrt{L^2+y^2}} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{L^2+y^2}}$$

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \sqrt{L^2+y^2}$$

68 Considera il campo elettrico $\vec{E}$ uniforme rappresentato nella figura.

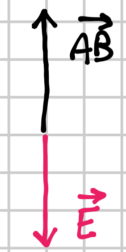


▶ Calcola esplicitamente la circuitazione del campo elettrico lungo il percorso orientato chiuso descritto dal triangolo rettangolo ABC. [0]

$$\overline{AB} = \overline{BC}\cos\beta$$

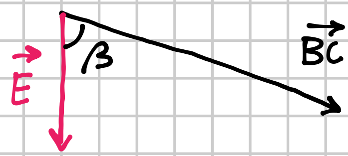
$$\overline{AC} = \overline{BC}\sin\beta$$

1° TRATTO



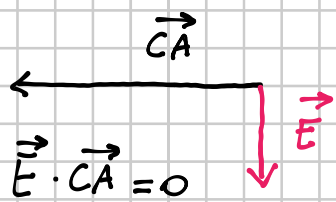
$$\vec{E}\cdot\vec{AB} = -E\,\overline{AB}$$

2° TRATTO



$$\vec{E}\cdot\vec{BC} = E\,\overline{BC}\cos\beta$$

3° TRATTO



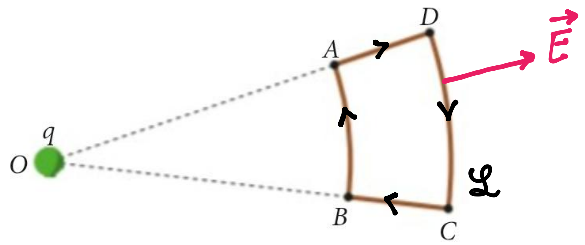
$$\vec{E}\cdot\vec{CA} = 0$$

$$\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{E}) = \vec{E}\cdot\vec{AB} + \vec{E}\cdot\vec{BC} + \vec{E}\cdot\vec{CA} =$$

$$= -E\,\overline{AB} + E\,\overline{BC}\cos\beta + 0 =$$

$$= -E\,\overline{BC}\cos\beta + E\,\overline{BC}\cos\beta = \boxed{0}$$

69 ◆◆◆ Una carica puntiforme $q = 2{,}0 \times 10^{-8}$ C è posta nel vuoto nel punto O. Considera il percorso chiuso $ABCD$ mostrato nella figura, dove AB e CD sono archi di circonferenza centrati in O, $\overline{OA} = \overline{OB} = 6{,}0$ m e $\overline{OD} = \overline{OC} = 8{,}0$ m.



▶ Verifica che la circuitazione del campo elettrico generato dalla carica lungo il percorso chiuso $ABCD$ è nullo, calcolando esplicitamente i contributi alla circuitazione nei tratti AB, BC, CD, DA.

[0; 7,5 V; 0; −7,5 V]

$$\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{E}) = \Gamma_{A\to D} + \Gamma_{D\to C} + \Gamma_{C\to B} + \Gamma_{B\to A}$$

$$\Gamma_{A\to D} = \sum_{A}^{D} \vec{E}\cdot\Delta\vec{\ell} = V_A - V_D$$

$$= k_0 \frac{q}{\overline{OA}} - k_0 \frac{q}{\overline{OD}} =$$

$$= k_0 q \left(\frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OD}}\right) =$$

$$= \left(8{,}99\times 10^{9}\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}\right)\left(2{,}0\times 10^{-8}\ C\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{6{,}0\,m} - \frac{1}{8{,}0\,m}\right) =$$

$$= 7{,}49\overline{16}\ V \simeq 7{,}5\ V$$

$$\Gamma_{D\to C} = \sum_{D}^{C} \underbrace{\vec{E}\cdot\Delta\vec{\ell}}_{0}$$

$\vec{E}$ è sempre perpendicolare all'arco DC $\Rightarrow$ prodotto scalare nullo

$$\Gamma_{C\to B} = V_C - V_B = k_0 \frac{q}{\overline{OC}} - k_0 \frac{q}{\overline{OB}} = k_0 q \left(\frac{1}{8{,}0\,m} - \frac{1}{6{,}0\,m}\right) = \ldots = -7{,}49\overline{16}\ V$$

$$\simeq -7{,}5\ V$$

$\Gamma_{B\to A} = 0$ perché $\vec{E} \perp \Delta\vec{\ell}$

$$\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{E}) = 7{,}5\,V + 0 - 7{,}5\,V + 0 = 0$$