ANGOLO AGGIUNTO

$$y = a \sin x + b \cos x = r \sin(x + \varphi) \qquad r \geq 0$$

$a, b \in \mathbb{R}$

$$r \sin(x+\varphi) = r\left[\sin x \cos\varphi + \cos x \sin\varphi\right] =$$

$$= \underbrace{r\cos\varphi}_{a} \sin x + \underbrace{r\sin\varphi}_{b} \cos x$$

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases}$$

DIVIDO MEMBRO A MEMBRO

$$\frac{\cancel{r}\sin\varphi}{\cancel{r}\cos\varphi} = \frac{b}{a}$$

$$\Downarrow$$

$$\tan\varphi = \frac{b}{a}$$

$$a^2 + b^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi$$

$$a^2 + b^2 = r^2 \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} \implies r = \sqrt{a^2+b^2}$$

In definitiva

$$a \sin x + b \cos x = r \sin(x+\varphi) \quad \text{dove} \quad r = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{b}{a}$$

Come determinare φ?

$\begin{cases} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases}$ quindi $\cos\varphi$ deve avere lo stesso segno di a
$\sin\varphi$ deve avere lo stesso segno di b

si stabilisce il quadrante corretto

76 $y = \frac{1}{4}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos x$

Determinare r e l'angolo aggiunto φ

$$y = \underbrace{\frac{1}{4}}_{a=\frac{1}{4}}\sin x + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{4}}_{b=\frac{\sqrt{3}}{4}}\cos x$$

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\varphi = \frac{b}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \quad \vee \quad \varphi = \frac{\pi}{3}+\pi = \frac{4}{3}\pi$$

quale scegliere?

scelgo $\varphi = \frac{\pi}{3}$ perché a e b sono positivi $\longrightarrow$ $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ ha cos e sin entrambi positivi}}$

$\varphi = \frac{4}{3}\pi$ ha cos e sin entrambi negativi

$$y = \frac{1}{4}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos x = \frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

77 $y = -\sin x + \sqrt{3}\cos x + 1$

$$y = \underbrace{-}_{a=-1}\sin x + \underbrace{\sqrt{3}}_{b=\sqrt{3}}\cos x + 1$$

$$r = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2 \qquad \tan\varphi = -\sqrt{3}$$

$-\frac{\pi}{3}+\pi$

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} \quad \vee \quad \varphi = \frac{2}{3}\pi$$

scelgo questo perché $\cos\frac{2}{3}\pi < 0$ come a e $\sin\frac{2}{3}\pi > 0$ come b

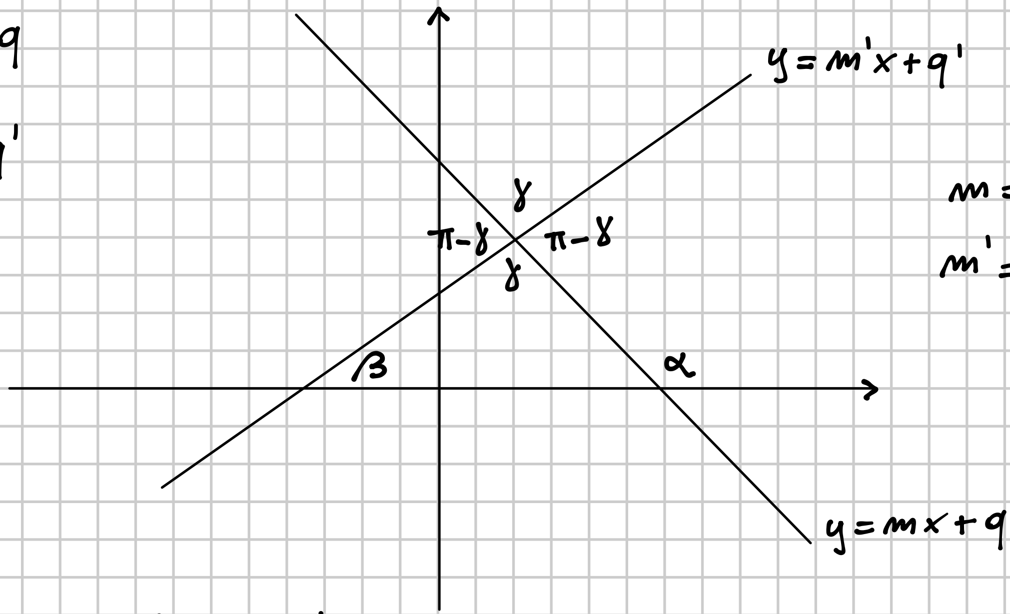
$$y = -\sin x + \sqrt{3}\cos x + 1$$

$$= 2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)+1$$

ANGOLO FRA 2 RETTE

$y = mx + q$

$y = m'x + q'$



$m = \tan\alpha$

$m' = \tan\beta$

$\beta + \gamma = \alpha$ per il TH. DELL'ANGOLO ESTERNO

$\gamma = \alpha - \beta \implies \tan\gamma = \tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \dfrac{m - m'}{1 + m \cdot m'}$

$$\boxed{\tan\gamma = \frac{m - m'}{1 + mm'}}$$ $\rightarrow$ trovo γ (mediante arctan) e poi $\pi - \gamma$

Se $\tan\gamma > 0$, allora γ è l'angolo acuto;
se $\tan\gamma < 0$, allora γ è l'angolo ottuso.

Se le 2 rette sono perpendicolari, allora $1 + mm' = 0$

Calcolare la tangente "dell'angolo" tra le 2 rette

88 $\sqrt{3}\,x - y + 3 = 0; \quad x - \sqrt{3}\,y = -2.$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

$y = \sqrt{3}x + 3$ $\qquad\qquad y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}$

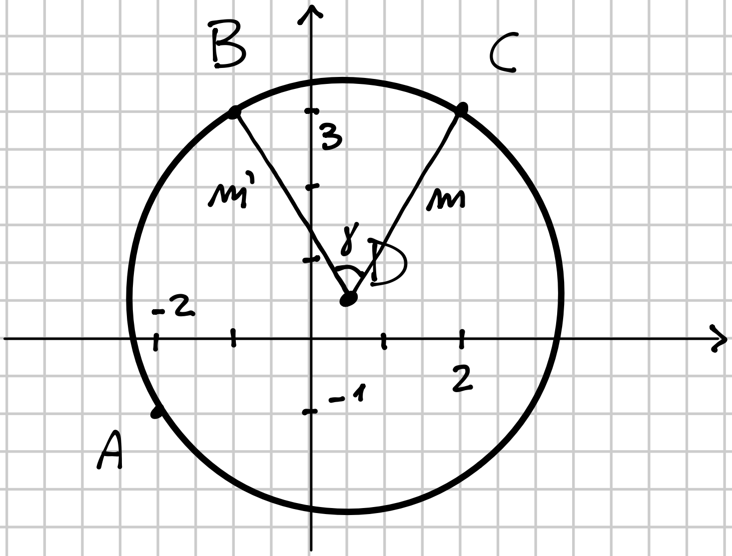
$m = \sqrt{3}$ $\qquad\qquad m' = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\tan\gamma = \frac{m - m'}{1 + mm'} = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{3-1}{\sqrt{3}}}{1+1} = \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\gamma = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$ $\qquad\qquad \pi - \gamma = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

98 Considera il triangolo di vertici $A(-2; -1)$, $B(-1; 3)$, $C(2; 3)$; detto D il centro della circonferenza circoscritta, trova l'angolo $B\widehat{D}C$.

$\left[\arctan\frac{15}{8}\right]$



Per trovare il centro D faccio l'intersezione fra gli assi di BC e AC.

ASSE DI BC $\quad x = \frac{1}{2}$

ASSE DI AC

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2$$

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{4} + 4x + \cancel{y^2} + 1 + 2y = \cancel{x^2} + \cancel{4} - 4x + \cancel{y^2} + 9 - 6y$$

$8x + 8y - 8 = 0 \qquad x + y - 1 = 0$

$$D\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + y - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$B(-1,3) \qquad C(2,3) \qquad D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$m = \frac{3-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3} \qquad m' = \frac{3-\frac{1}{2}}{-1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{5}{3}$$

coeff. ang. di CD

coeff. ang. di BD

angolo ottuso

$$\tan\gamma' = \frac{m-m'}{1+mm'} = \frac{\frac{5}{3}+\frac{5}{3}}{1-\frac{25}{9}} = \frac{\frac{10}{3}}{-\frac{16}{9}} = -\frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{3}_{1}}\cdot\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{16}_{8}} = -\frac{15}{8}$$

$$\gamma = -\arctan\left(-\frac{15}{8}\right) = \arctan\frac{15}{8}$$

angolo acuto

103 Due rette r e s passanti per $A(4; 2)$ formano un angolo α tale che $\tan\alpha = \frac{1}{2}$. Sapendo che r passa per $B(10; 4)$ e che s interseca l'asse y in un punto di ordinata negativa, trova l'equazione della retta s.

[$y = x - 2$]

r passa per $A(4,2)$ e per $B(10,4)$

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{x-x_A}{x_B-x_A} \qquad \frac{y-2}{4-2} = \frac{x-4}{10-4} \qquad \frac{y-2}{\cancel{2}_1} = \frac{x-4}{\cancel{6}_3}$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} + 2 \qquad y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \qquad m' = \frac{1}{3}$$

1) $$\tan\alpha = \frac{m-m'}{1+mm'} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{m-\frac{1}{3}}{1+\frac{m}{3}}$$

$$1 + \frac{m}{3} = 2m - \frac{2}{3}$$

$$2m - \frac{m}{3} = 1 + \frac{2}{3}$$

$$6m - m = 3 + 2 \qquad m = 1$$

2) $\tan\alpha = \dfrac{m' - m}{1 + m'm} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{\frac{1}{3} - m}{1 + \frac{m}{3}}$

$$1 + \frac{m}{3} = \frac{2}{3} - 2m$$

$$\frac{m}{3} + 2m = \frac{2}{3} - 1$$

$$7m = -1$$

$$m = -\frac{1}{7}$$

Le 2 soluzioni trovate $m = 1$, $m = -\frac{1}{7}$ danno entrambe rette che formano con r un angolo la cui tangente è $\frac{1}{2}$

$A(4,2)$ $\quad\quad y - 2 = m(x-4)$

1) $y - 2 = x - 4 \Rightarrow y = x - 2$ passa per $(0,-2)$

2) $y - 2 = -\frac{1}{7}(x-4) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{7}x + \frac{4}{7}$

$$y = -\frac{1}{7}x + \frac{4}{7} + 2$$

$y = -\frac{1}{7}x + \frac{18}{7}$ passa per $\left(0, \frac{18}{7}\right)$

Dato che s deve intersecare l'asse y in un punto di ordinata negativa, s è $\boxed{y = x - 2}$.