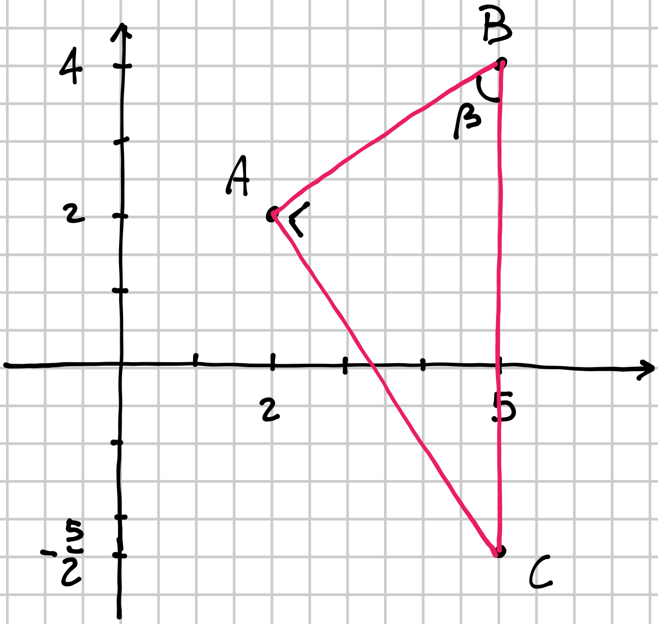
71 Determina gli angoli del triangolo di vertici $(2; 2)$, $(5; 4)$, $\left(5; -\frac{5}{2}\right)$. [33,7°; 56,3°; 90°]



$$m_{AB} = \frac{4-2}{5-2} = \frac{2}{3}$$

$$m_{AC} = \frac{2-\left(-\frac{5}{2}\right)}{2-5} = \frac{2+\frac{5}{2}}{-3} = \frac{\frac{9}{2}}{-3} = -\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{3}{2}$$

m_{AB} è antireciproco di m_{AC},
$AB \perp AC \Rightarrow \hat{A} = 90°$

$$\overline{AB} = \overline{BC}\cdot\cos\beta$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-2)^2+(4-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$\overline{BC} = \left|4-\left(-\frac{5}{2}\right)\right| = 4+\frac{5}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\Downarrow$$

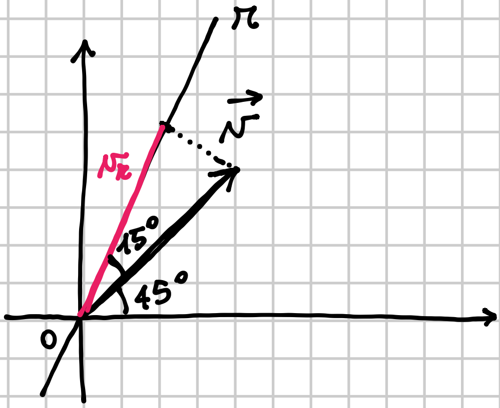
$$\cos\beta = \frac{\sqrt{13}}{\frac{13}{2}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\beta = \arccos\frac{2\sqrt{13}}{13} = 56{,}309\ldots° \simeq 56{,}3°$$

$$\beta = \hat{B}$$

$$\hat{C} = 180° - 90° - 56{,}309\ldots° \simeq 33{,}7°$$

77 **FISICA** **MOTO RETTILINEO** Un punto materiale si muove, su un piano orizzontale, partendo dall'origine del sistema di riferimento, con velocità $\vec{v}$ costante, di modulo pari a 2,0 m/s e inclinata di 45° rispetto all'asse x. Quanto vale la proiezione del vettore velocità sulla retta che forma un angolo di 60° con l'asse x? [1,9 m/s]



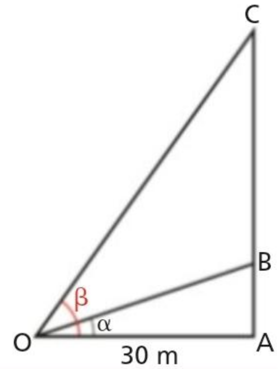
$$v_r = v\cos 15° = v\cos(60°-45°) =$$

$$= v\left[\cos 60°\cos 45° + \sin 60°\sin 45°\right] =$$

$$= \left(2{,}0\ \frac{m}{s}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right) = \left(2{,}0\ \frac{m}{s}\right)\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} =$$

$$= 1{,}931\ldots\ \frac{m}{s} \simeq \boxed{1{,}9\ m/s}$$

79 **La città eterna** L'Obelisco Lateranense, situato a Roma in piazza San Giovanni, è alto 32 m ed è posto su un basamento alto 10 m. Nella figura, BC rappresenta l'obelisco e AB il suo basamento. Un osservatore si trova nel punto O, distante 30 m da A.



a. Calcola $\tan\alpha$ e $\tan\beta$ applicando la definizione di tangente di un angolo.

b. Usa le formule goniometriche per calcolare $\sin(\beta-\alpha)$.

$\left[\text{a) } \frac{1}{3}, \frac{7}{5}; \text{ b) } \frac{8}{185}\sqrt{185}\right]$

$$\tan\alpha = \frac{BA}{OA} = \frac{10\,m}{30\,m} = \frac{1}{3} \qquad \tan\beta = \frac{AC}{OA} = \frac{42\,m}{30\,m} = \frac{7}{5}$$

$$\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta = (*)$$

$$\begin{cases} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{3} \\ \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \end{cases} \qquad \sin\alpha = \frac{1}{3}\cos\alpha \qquad \cos^2\alpha + \frac{1}{9}\cos^2\alpha = 1 \qquad \frac{10}{9}\cos^2\alpha = 1$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{7}{5} \\ \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1 \end{cases} \qquad \sin\beta = \frac{7}{5}\cos\beta \qquad \cos^2\beta + \frac{49}{25}\cos^2\beta = 1 \qquad \frac{74}{25}\cos^2\beta = 1$$

$$\begin{cases} \cos\beta = \frac{5}{\sqrt{74}} \\ \sin\beta = \frac{7}{\sqrt{74}} \end{cases}$$

$$(*) = \frac{7}{\sqrt{74}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{5}{\sqrt{74}} = \frac{21-5}{2\sqrt{185}} = \frac{8}{\sqrt{185}} \cdot \frac{\sqrt{185}}{\sqrt{185}} = \frac{8\sqrt{185}}{185}$$

86

a. Dal grafico deduci il valore di a e b, con $a, b \in \mathbb{R}$.

b. Trasforma $f(x)$ nella forma $y = r\sin(x + \varphi)$.

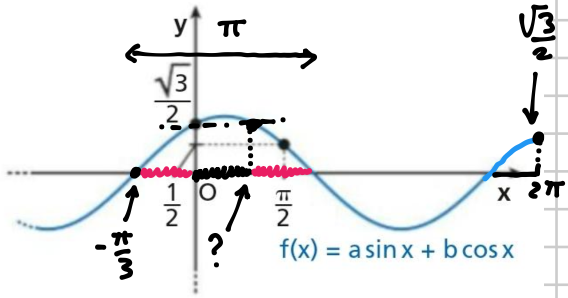
c. Deduci dal grafico le soluzioni della disequazione

$$f(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

nell'intervallo $[0; 2\pi]$.

d. Costruisci i grafici delle funzioni $y = |f(x)|$ e $y = f(|x|)$.

e. Quale traslazione potresti applicare alla funzione $y = f(x)$ per renderla pari?



$\left[\text{a) } a = \frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ b) } y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right); \text{ c) } 0 < x < \frac{\pi}{3}; \text{ e) } \vec{v}\left(-\frac{\pi}{6}; 0\right)\right]$

a) $f(x) = a\sin x + b\cos x$ $\qquad f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$$f(0) = a \cdot \sin 0 + b \cdot \cos 0 = a \cdot 0 + b \cdot 1 = b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a \cdot \sin\frac{\pi}{2} + b \cdot \cos\frac{\pi}{2} = a \cdot 1 + b \cdot 0 = a = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$$

b) $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = r\sin(x + \varphi) = r\left[\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi\right] =$

$$= r\cos\varphi \cdot \sin x + r\sin\varphi \cdot \cos x$$

$$\begin{cases} r\cos\varphi = \frac{1}{2} \\ r\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

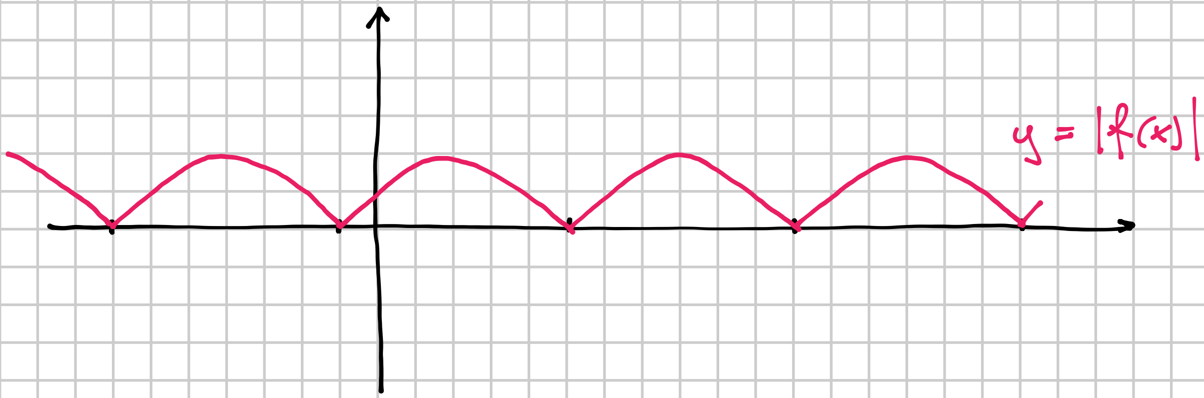
$$\tan\varphi = \sqrt{3} \qquad \varphi = \frac{\pi}{3} \qquad f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

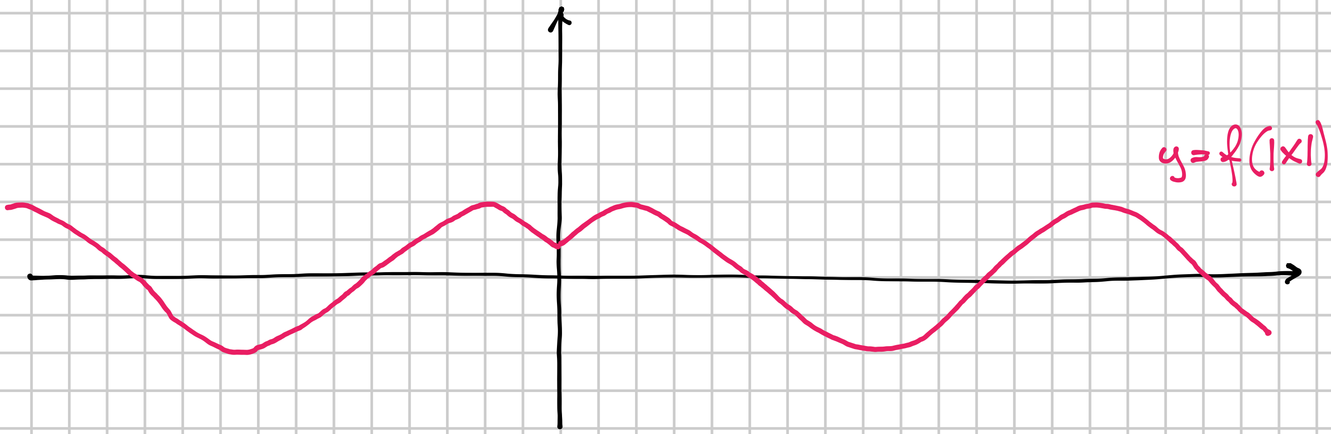
c) Gli intervalli devono avere la stessa lunghezza $= \frac{\pi}{3}$

L'intervallo è lungo $\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$

$f(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$ in $[0, 2\pi]$ per $0 < x < \frac{\pi}{3}$

d)





e) Per renderla pari basta traslare $y = f(x)$ verso sinistra di $\frac{\pi}{6}$

$$g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

Diventerebbe esattamente $y = \cos x$ (PARI)

EQUAZIONI GONIOMETRICHE ELEMENTARI

$\sin x = m$ $\qquad m \in \mathbb{R}$

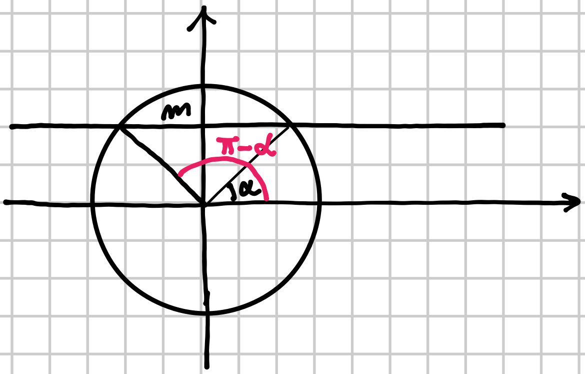
$\cos x = m$

$\tan x = m$

1) $\sin x = m$

$|m| > 1 \Rightarrow$ l'equazione è impossibile

$|m| \leq 1 \Rightarrow$ l'equazione ha infinite soluzioni



$\alpha = \arcsin(m)$

$x = \alpha + 2k\pi \quad \vee \quad x = (\pi - \alpha) + 2k\pi$

ES.

$\sin x = \frac{1}{2} \qquad \alpha = \frac{\pi}{6}$

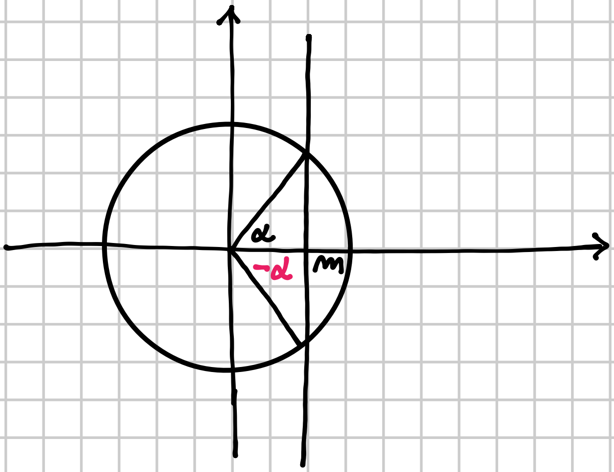
$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

2) $\cos x = m$

$|m| > 1 \Rightarrow$ l'eq. è impossibile

$|m| \leq 1 \Rightarrow$ l'eq. ha infinite soluzioni



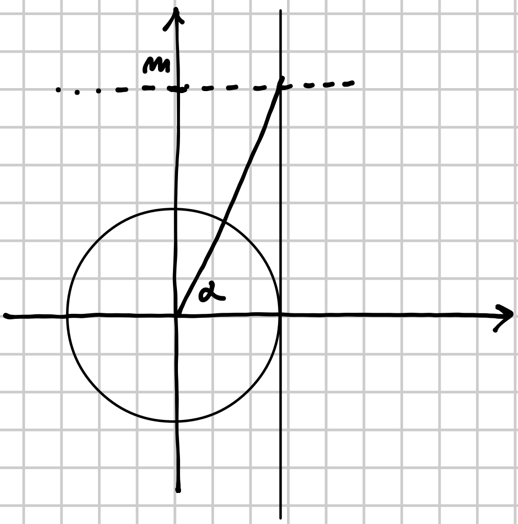
$\alpha = \arccos m$

$x = \pm\alpha + 2k\pi$

ESEMPIO

$\cos x = \frac{1}{5}$ $\qquad$ $x = \pm \arccos \frac{1}{5} + 2k\pi$

3) $\tan x = m$ $\qquad$ ha infinite soluzioni per ogni $m \in \mathbb{R}$



$\alpha = \arctan m$

$x = \alpha + k\pi$

ESEMPIO

$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

13 $2\sin x = -\sqrt{2}$ $\left[\frac{5}{4}\pi + 2k\pi; \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\right]$

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\alpha = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$

$x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$

$$\boxed{x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi}$$

14 $\sin x - 1 = 0$ $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

$\sin x = 1$ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Downarrow$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$