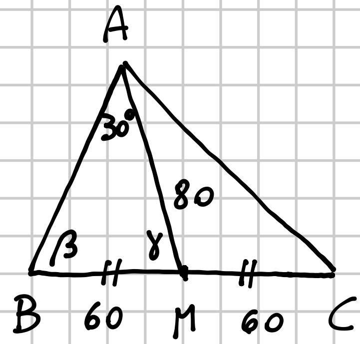
204 Nel triangolo acutangolo ABC la mediana AM è lunga 80 cm e forma, col lato AB, un angolo di 30°. La lunghezza del lato BC è 120 cm. Calcola l'area del triangolo ABC.

$[800(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})\ \text{cm}^2]$



Applico il teorema dei seni al triangolo ABM

$$\frac{80}{\sin\beta} = \frac{60}{\sin 30°} \Rightarrow \sin\beta = \frac{\overset{4}{\cancel{80}} \cdot \sin 30°}{\underset{3}{\cancel{60}}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\beta = \arcsin\frac{2}{3} \qquad (\text{perché } \beta \text{ acuto})$$

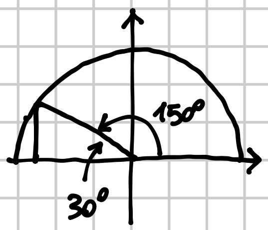
$$\gamma = 180° - 30° - \arcsin\frac{2}{3} = 150° - \arcsin\frac{2}{3}$$

Applico ancora il teorema dei seni al triangolo ABM

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\gamma} = \frac{60}{\sin 30°} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{60}{\frac{1}{2}} \cdot \sin\gamma = 120 \cdot \sin\left(150° - \arcsin\frac{2}{3}\right) =$$

$$= 120 \cdot \left[\sin 150° \cdot \cos\left(\arcsin\frac{2}{3}\right) - \cos 150° \cdot \sin\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)\right] =$$

$$= 120 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{2}{3}\right] =$$



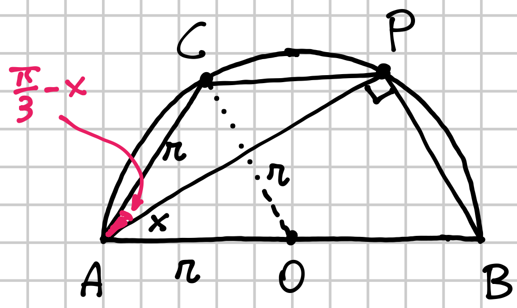
$$= 120\left[\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{9}} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right] = \overset{40}{\cancel{120}}\left[\frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}}{\cancel{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\cancel{3}}\right] =$$

$$= 40\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{3}\right)$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AB} \cdot \sin\beta = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{\overset{20}{\cancel{60}}}{\cancel{120}} \cdot 40\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{3}\right) \cdot \frac{2}{\cancel{3}} = \boxed{1600\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{3}\right)}$$

178 Su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ considera la corda $\overline{AC} = r$ e sull'arco $\widehat{CB}$ un punto P variabile, con $P\widehat{A}B = x$. Calcola x in modo che il perimetro di $ACPB$ sia $5r$. Trova poi l'area del quadrilatero corrispondente al valore di x determinato.

$\left[\frac{\pi}{6}; \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}\right]$



$\overline{AB} = 2r \quad \overline{AC} = r$

Trovare x tale che

$2p_{ACPB} = 5r$

$\mathcal{A}_{ACPB} = ?$

AOC è EQUILATERO $\Rightarrow C\hat{A}O = \frac{\pi}{3}$

LIMITI $\quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

TH. CORDA $\Rightarrow \overline{CP} = 2r\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \qquad \overline{PB} = 2r\sin x$

$$2p(x) = \overset{\overline{AB}+\overline{AC}}{3r} + 2r\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) + 2r\sin x \qquad \text{FUNZIONE PERIMETRO}$$

$x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

$$3\cancel{r} + 2\cancel{r}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) + 2\cancel{r}\sin x = 5\cancel{r}$$

$$\cancel{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) + \cancel{2}\sin x = \cancel{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) + \sin x = 1$$

$$\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin x + \sin x - 1 = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x + \sin x - 1 = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x - 1 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y - 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = -\sqrt{3}X + 2 \\ X^2 + \left(-\sqrt{3}X + 2\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$X^2+\left(-\sqrt{3}X+2\right)^2=1$$

$$X^2+3X^2+4-4\sqrt{3}X-1=0$$

$$4X^2-4\sqrt{3}X+3=0$$

$$\left(2X-\sqrt{3}\right)^2=0$$

$$\begin{cases} X=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ Y=-\sqrt{3}X+2=-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+2=-\frac{3}{2}+2= \\ =\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ Y=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$$ ACCETTABILE perché compreso fra 0 e $\frac{\pi}{3}$

Osservo che per $x=\frac{\pi}{6}$ il quadrilatero è un TRAPEZIO ISOSCELE con

$\overline{AB}=2r$ $\quad\overline{PB}=\overline{AC}=r$ $\quad\overline{CP}=r$ $\quad$ l'altezza è $h=r\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{CP}\right)\cdot h=\frac{1}{2}\left(2r+r\right)\cdot r\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$$