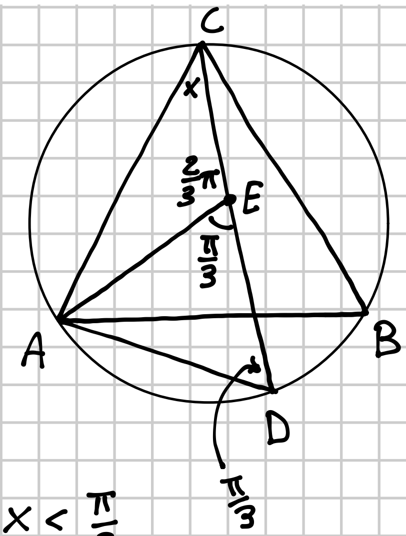
209 Sia ABC un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio r. Considera una corda CD interna all'angolo $A\widehat{C}B$ e su CD un punto E tale che $AD \cong DE$. Dopo aver dimostrato che il triangolo ADE è equilatero, esprimi in funzione di $x = A\widehat{C}D$ il perimetro del triangolo AEC.
Determina poi per quale valore di x il perimetro misura $(2+\sqrt{3})r$.

$\left[r(\sin x + \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3});\ x = \frac{\pi}{6}\right]$



$0 < x < \frac{\pi}{3}$

lato del triangolo $\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BC} = 2r\sin\frac{\pi}{3} =$
$= 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$

$\overline{AD} = \overline{DE}$

$\hat{B} = \hat{D} = \frac{\pi}{3}$ perché angoli alla circonf. che insistono sullo stesso arco AC

$DE \cong AD$ per costruzione $\Rightarrow ADE$ è isoscele
e dunque $\hat{A} = \hat{E} = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) : 2 = \frac{\pi}{3}$
$\Rightarrow \hat{A} = \hat{D} = \hat{E} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow ADE$ è equilatero

TH. CORDA

$\overline{AE} = \overline{AD} = 2r\sin x$

$D\hat{A}C = \pi - x - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi - x$

$\overline{CD} = 2r\sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right)$

$\overline{AC} = r\sqrt{3}$

$\overline{CE} = \overline{CD} - \overline{DE} = 2r\sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) - 2r\sin x$

$$2p_{AEC} = \overline{AC} + \overline{AE} + \overline{CE} = r\sqrt{3} + \cancel{2r\sin x} + 2r\sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) - \cancel{2r\sin x} =$$

$$= r\sqrt{3} + 2r\left[\sin\frac{2}{3}\pi\cos x - \cos\frac{2}{3}x\sin x\right] =$$

$$= r\sqrt{3} + \cancel{2}r\left[\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cos x + \frac{1}{\cancel{2}}\sin x\right] = r\left[\sqrt{3} + \sqrt{3}\cos x + \sin x\right]$$

$0 < x < \frac{\pi}{3}$

$$\cancel{r}\left[\sqrt{3} + \sqrt{3}\cos x + \sin x\right] = (2+\sqrt{3})\cancel{r} \Rightarrow \sqrt{3}\cos x + \sin x = 2$$

$$0 < x < \frac{\pi}{3}$$

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}X + Y = 2 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = 2 - \sqrt{3}X \\ X^2 + (2 - \sqrt{3}X)^2 = 1 \end{cases}$$

$$X^2 + 4 + 3X^2 - 4\sqrt{3}X - 1 = 0$$

$$4X^2 - 4\sqrt{3}X + 3 = 0$$

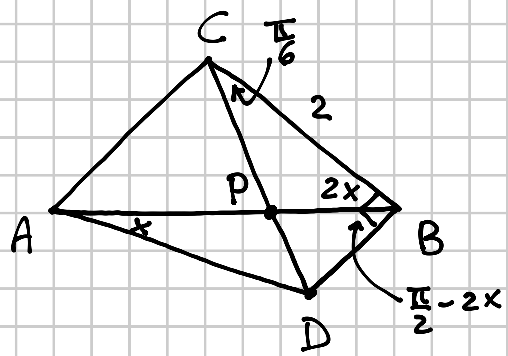
$$(2X - \sqrt{3})^2 = 0$$

$$\begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ Y = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6}}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{3}$$

211 Considera il segmento AB e nei due semipiani opposti disegna il triangolo ABC con $C\widehat{B}A = 2x$ e $\overline{CB} = 2$ e il triangolo ABD con $B\widehat{A}D = x$. I due triangoli sono tali che $C\widehat{B}D = \frac{\pi}{2}$. Indica con P il punto di intersezione dei segmenti CD e AB. Sapendo che $P\widehat{C}B = \frac{\pi}{6}$, determina la misura di AD in funzione di x e calcola per quali valori di x è $\overline{AD} > \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\left[\overline{AD} = \frac{2\cos 2x}{\sqrt{3}\sin x};\ 0 < x < \frac{\pi}{6}\right]$



$0 < 2x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{4}$

$\overline{DB} = \overline{CB} \cdot \tan\frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

TH. SENI TRIANG. ADB $\Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)} = \frac{\overline{DB}}{\sin x}$

$\overline{AD} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{\sin x} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \frac{2\sqrt{3}\cos 2x}{3\sin x}$

$\overline{AD} > \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{\cancel{2\sqrt{3}}\cos 2x}{\cancel{3}\sin x} > \frac{\cancel{2\sqrt{3}}}{\cancel{3}} \qquad 0 < x < \frac{\pi}{4}$

$\frac{\cos 2x}{\sin x} > 1 \qquad \cos 2x > \sin x$

perché $\sin x > 0$ (per $0 < x < \frac{\pi}{4}$)

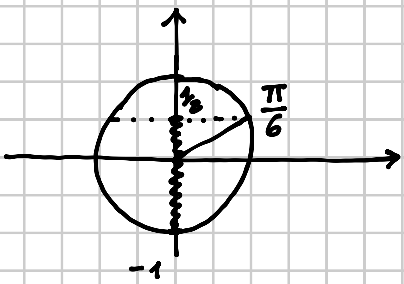
$\Downarrow$

$1 - 2\sin^2 x > \sin x$

$-2\sin^2 x - \sin x + 1 > 0$

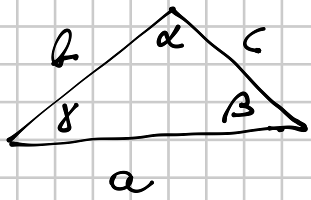
$2\sin^2 x + \sin x - 1 < 0$

$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \qquad -1 < \sin x < \frac{1}{2}$



$\boxed{0 < x < \frac{\pi}{6}}$ (perché $0 < x < \frac{\pi}{4}$)

222 $a = 24$, $b = 12$, $c = 12\sqrt{3}$. γ? [60°]



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{24^2+12^2-12^2\cdot 3}{2\cdot 24\cdot 12} =$$

$$= \frac{12^2\cdot 2^2 + 12^2 - 12^2\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 12\cdot 12} = \frac{\cancel{12^2}(4+1-3)}{4\cdot \cancel{12^2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\gamma = 60°}$$

225 $a = 5$, $c = 9$, $\beta = \arccos\frac{1}{3}$. b? [$\sqrt{76}$]

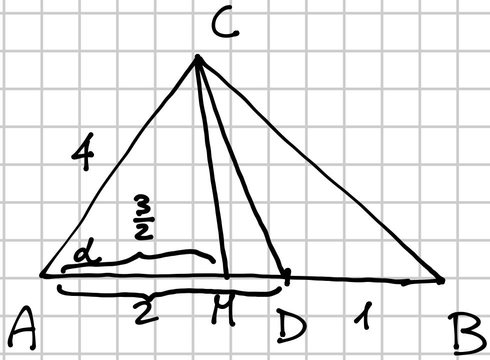
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta =$$

$$= 25 + 81 - 2\cdot 5\cdot 9\cdot\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right) =$$

$$= 25 + 81 - 90\cdot\frac{1}{3} = 25 + 81 - 30 = 76 \Rightarrow \boxed{b = \sqrt{76}}$$

232 Nel triangolo ABC la misura di AC è 4 e il coseno dell'angolo $\widehat{A}$ è $\frac{3}{4}$. Il punto D divide AB in modo che $\overline{AD} = 2$ e $\overline{DB} = 1$. Trova $\overline{CD}$, $\overline{CB}$ e la misura di CM, mediana relativa ad AB.

$\left[2\sqrt{2}; \sqrt{7}; \frac{\sqrt{37}}{2}\right]$



$\cos\alpha = \frac{3}{4}$

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AD}\cdot\overline{AC}\cdot\cos\alpha =$$

$$= 4 + 16 - 2\cdot 2\cdot \cancel{4}\cdot\frac{3}{\cancel{4}} = 20 - 12 = 8 \Rightarrow \overline{CD} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos\alpha =$$

$$= 9 + 16 - 2\cdot 3\cdot \cancel{4}\cdot\frac{3}{\cancel{4}} = 25 - 18 = 7 \Rightarrow \overline{CB} = \sqrt{7}$$

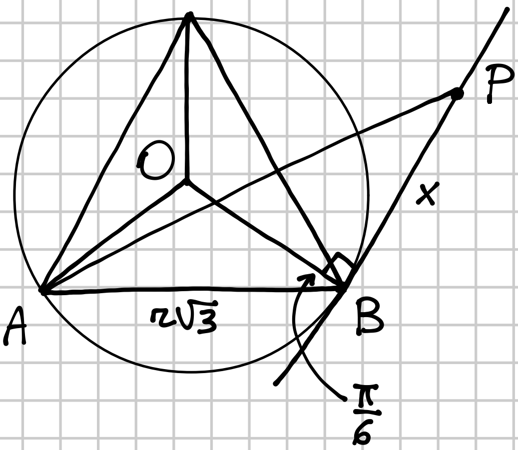
$$\overline{CM}^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 16 - \cancel{2}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{4}\cdot\frac{3}{\cancel{4}} = \frac{9}{4} + 16 - 9 = \frac{9}{4} + 7 = \frac{37}{4} \Rightarrow \overline{CM} = \frac{\sqrt{37}}{2}$$

244 La corda AB di una circonferenza di centro O e raggio r è lunga quanto il lato di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza. Traccia da B la tangente alla circonferenza e prendi su di essa un punto P appartenente al semipiano che è individuato da AB e contiene O. Scegli un'opportuna incognita x ed esprimi $\overline{AP}^2 - \overline{AB}^2$ in funzione di x. Chiama $f(x)$ tale funzione, rappresentala nel piano cartesiano e determina per quale valore di x è $f(x) = \frac{1}{4}r^2$.

$\left[f(x) = x^2 + \sqrt{3}\,rx,\ x \geq 0;\ x = \frac{r}{2}(2-\sqrt{3})\right]$

In 4 passi

1. Disegna la figura e considera il triangolo ABP, in cui sia $\overline{AB}$ sia l'angolo $A\widehat{B}P$ hanno un valore noto. Determina i loro valori.
2. È conveniente porre $\overline{BP} = x$ piuttosto che un angolo, perché in questo modo puoi trovare $\overline{AP}$ con il teorema del coseno.
3. Dopo aver espresso $f(x)$, trova il suo dominio e rappresenta la funzione nel piano cartesiano.
4. Risolvi l'equazione proposta.



$\overline{PB} = x$ $\qquad x > 0$

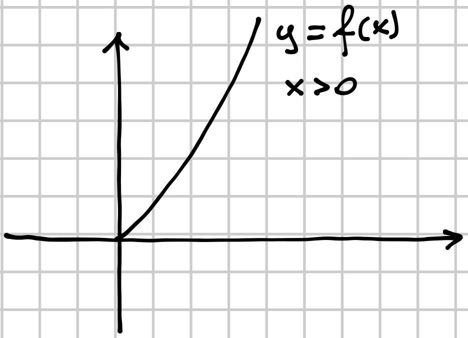
$A\hat{B}P = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$

TH. COSENO $\quad \overline{AP}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BP}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{BP}\cdot\cos\frac{2}{3}\pi =$

$= 3r^2 + x^2 - 2r\sqrt{3}\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 3r^2 + x^2 + r\sqrt{3}\,x$

$f(x) = \overline{AP}^2 - \overline{AB}^2 = \cancel{3r^2} + x^2 + r\sqrt{3}\,x - \cancel{3r^2} = x^2 + r\sqrt{3}\,x$ $\qquad x > 0$

PARABOLA



$x_V = -\frac{r\sqrt{3}}{2}$ $\qquad y_V = \frac{r^2\cdot 3}{4} - \frac{r^2\cdot 3}{2} =$

$= -\frac{3}{4}r^2$

V nel III QUADR.

$f(x) = \frac{1}{4}r^2$ $\qquad x^2 + r\sqrt{3}\,x = \frac{1}{4}r^2$ $\qquad 4x^2 + 4\sqrt{3}\,rx - r^2 = 0$

$x > 0$

N.A.

$\frac{\Delta}{4} = (2\sqrt{3}\,r)^2 + 4r^2 = 16r^2$ $\qquad x = \frac{-2\sqrt{3}\,r \pm 4r}{4} =$ $-$ / $+$

$= \frac{4r - 2\sqrt{3}\,r}{4} = \boxed{\frac{2-\sqrt{3}}{2}\,r}$