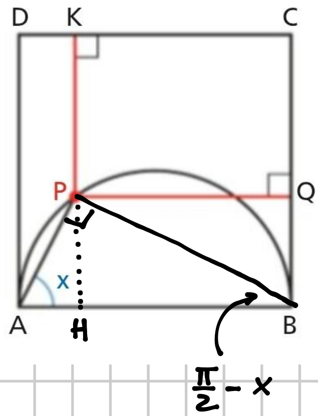
341 Il quadrato $ABCD$ nella figura ha il lato di lunghezza 2 e il punto P appartiene alla semicirconferenza di diametro AB.



a. Risolvi l'equazione $\frac{\overline{PK}}{\overline{PQ}} = \frac{3}{4}$.

b. Esprimi la funzione $f(x) = \overline{PK} + \overline{PQ}$ al variare di P sulla semicirconferenza e rappresentala in un periodo evidenziando la parte relativa al problema.

$\left[\text{a)}\, x = \arctan 2;\ \text{b)}\, y = 3 - \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\overline{PK} = 2 - \overline{PH} = 2 - \overline{PA}\cdot \sin x = 2 - 2\cos x \cdot \sin x$$

$$\overline{PQ} = 2 - \overline{AH} = 2 - \overline{PA}\cdot \cos x = 2 - 2\cos x \cdot \cos x = 2 - 2\cos^2 x$$

$$\frac{2 - 2\cos x \sin x}{2 - 2\cos^2 x} = \frac{3}{4} \qquad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$$

$x \neq 0$

$$\frac{\cancel{2}(1 - \cos x \sin x)}{\cancel{2}(1 - \cos^2 x)} = \frac{3}{4}$$

$$4 - 4\cos x \sin x = 3\sin^2 x$$

$$3\sin^2 x + 4\cos x \sin x - 4(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

$$3\sin^2 x + 4\cos x \sin x - 4\sin^2 x - 4\cos^2 x = 0$$

$$-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{4\cos x \sin x}{\cos^2 x} - \frac{4\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$-\tan^2 x + 4\tan x - 4 = 0 \qquad \tan^2 x - 4\tan x + 4 = 0$$

$$(\tan x - 2)^2 = 0$$

$$\tan x = 2 \qquad \boxed{x = \arctan 2}$$

$$f(x) = \overline{PK} + \overline{PQ} = 2 - 2\cos x \sin x + 2 - 2\cos^2 x =$$

$$= 4 - 2\cos x \sin x - 2\cos^2 x = 4 - 2\cos^2 x - \sin 2x =$$

$$= -\left(2\cos^2 x - 4\right) - \sin 2x = -\left(\underbrace{2\cos^2 x - 1}_{\cos 2x} - 3\right) - \sin 2x =$$

$$= -\cos 2x + 3 - \sin 2x = -\sin t - \cos t + 3$$

$2x = t$

$$= -\left(\sin t + \cos t - 3\right)$$

USO IL METODO DELL'ANGOLO AGGIUNTO

$$\sin t + \cos t = r\sin(t + \varphi) = r\left[\sin t \cos\varphi + \cos t \sin\varphi\right] =$$

$$= r\cos\varphi \sin t + r\sin\varphi \cos t$$

$$\begin{cases} r\cos\varphi = 1 \\ r\sin\varphi = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan\varphi = 1 \\ (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = 1 + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan\varphi = 1 \\ r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 2 \end{cases}$$

divido membro a membro

$$r^2\underbrace{\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)}_{1} = 2$$

$$\begin{cases} \tan\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \\ r = \sqrt{2} \end{cases}$$

Quindi:

$$\sin t + \cos t = \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(x) = -\left(\sin t + \cos t - 3\right) = -\left(\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - 3\right) =$$

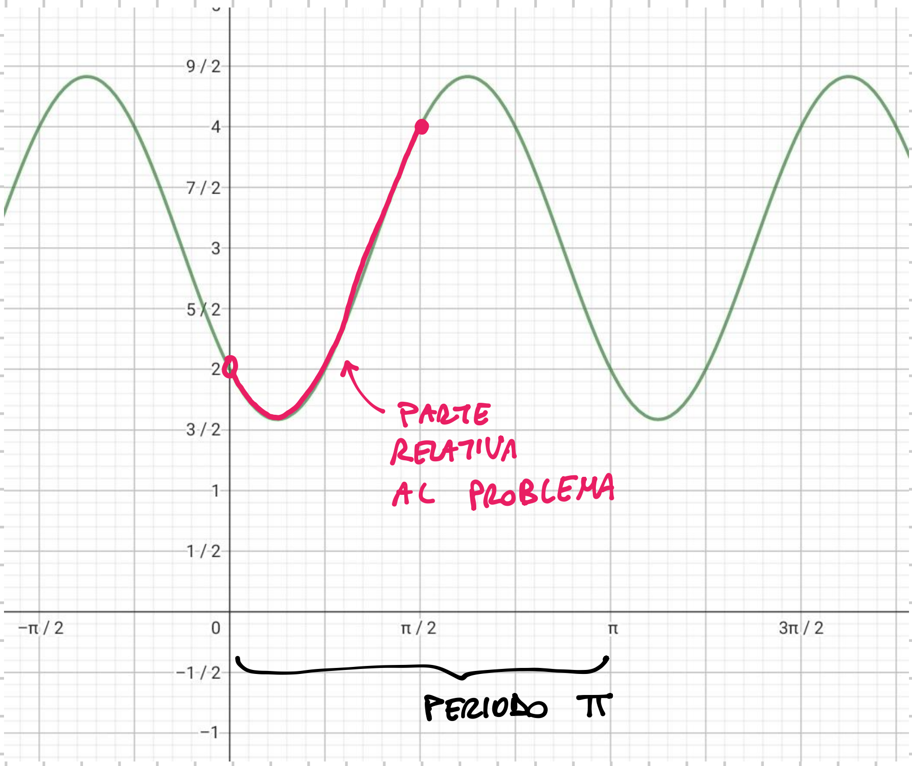
$$= -\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + 3 = -\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \qquad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$$

$t = 2x$

$$f(x) = -\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+3 \qquad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$$

PASSI $\quad \sin x \to \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \to \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$\to -\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) \to -\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+3$$



342 In una circonferenza di centro O e raggio r, è data la corda AB congruente al lato del triangolo equilatero inscritto. Conduci la tangente in B e considera su di essa un punto C appartenente allo stesso semipiano di O rispetto alla retta AB.

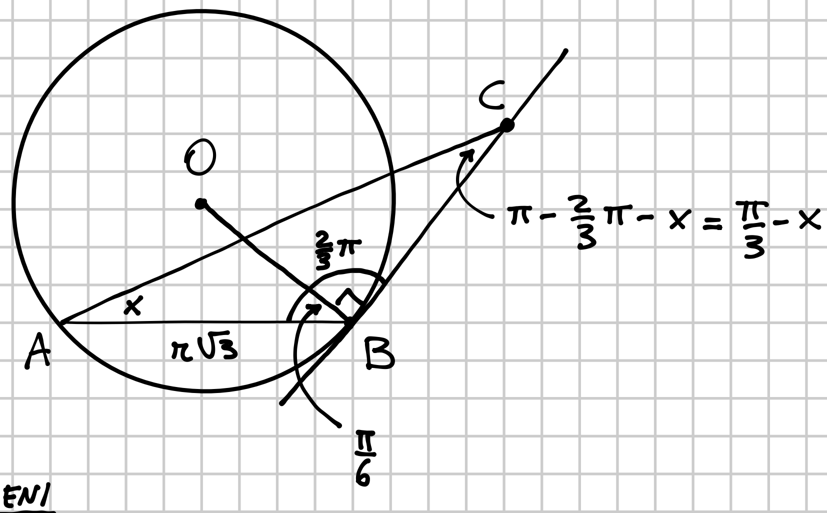
a. Indicato con x l'angolo $B\widehat{A}C$, calcola il valore di x per cui l'area del triangolo ABC vale $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$.

b. Rappresenta in un periodo la funzione

$$f(x) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}},$$

evidenziando il tratto relativo al problema.

$\left[\text{a) } x = 30°;\ \text{b) } f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin x, \text{ con } 0° \le x < 60°\right]$



$$0 \le x < \frac{\pi}{3}$$

TH. SENI

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\frac{2}{3}\pi} = \frac{\overline{AB}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{r\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}/2}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} = \frac{3r}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AB}\cdot\sin x = \frac{1}{2}r\sqrt{3}\cdot\frac{3r}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}\cdot\sin x =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$$

EQUAZIONE

$$\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4} \qquad 0 \le x < \frac{\pi}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$

$$x = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \qquad x = \pi - \left(\frac{\pi}{3}-x\right) + 2k\pi$$

$$\Downarrow \qquad \cancel{x} = \frac{2}{3}\pi + \cancel{x} + 2k\pi$$

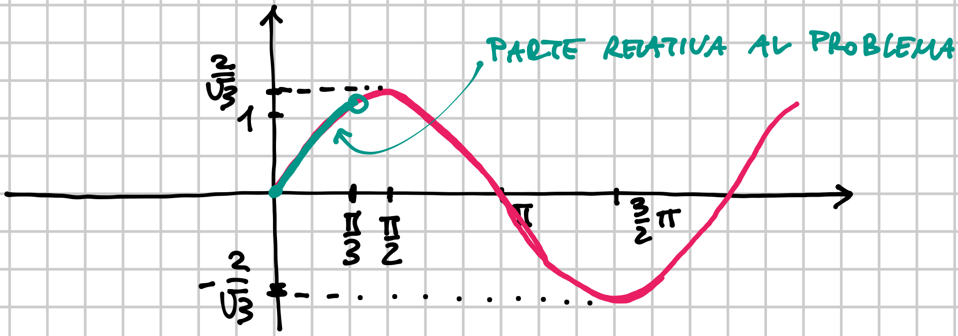
$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{IMPOSS.}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{6}} \Leftarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

TH. SENI

$$\frac{\overline{BC}}{\sin x} = \frac{\overline{AC}}{\sin \frac{2}{3}\pi}$$

$$f(x) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\sin x}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{\sin x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin x \qquad 0 \leq x < \frac{\pi}{3}$$

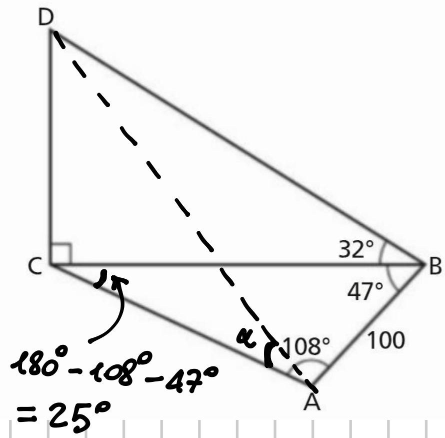


39 **Triangolazioni** Luca vuole stimare l'altezza CD di un faro posto su un'isola e procede fissando due punti A e B sulla terraferma alla stessa quota della base C del faro ed eseguendo le misure che seguono:

$$AB = 100 \text{ m},\ B\widehat{A}C = 108°,\ A\widehat{B}C = 47° \text{ e } C\widehat{B}D = 32°.$$

Trova l'altezza CD del faro e l'ampiezza degli angoli $A\widehat{C}D$ e $C\widehat{A}D$.

[$CD \simeq 140{,}6$ m; $A\widehat{C}D = 90°$; $C\widehat{A}D \simeq 39°$]



$$\overline{CD} = \overline{CB} \cdot \tan 32° \qquad \frac{\overline{CB}}{\sin 108°} = \frac{\overline{AB}}{\sin 25°} \Rightarrow \overline{CB} = \frac{100 \cdot \sin 108°}{\sin 25°}$$

$$= 100 \cdot \frac{\sin 108°}{\sin 25°} \cdot \tan 32° =$$

$$= 140{,}62\ldots \simeq 140{,}6 \Rightarrow \quad CD \simeq \boxed{140{,}6 \text{ m}}$$

$A\hat{C}D = 90°$ perché CD è perpendicolare al piano su cui giace il triangolo ABC

$$\overline{CD} = \overline{AC} \cdot \tan \alpha$$

<u>TH. SENI</u>

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 47°} = \frac{\overline{AB}}{\sin 25°} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{100 \cdot \sin 47°}{\sin 25°}$$

$$\overline{CD} = \frac{100 \cdot \sin 47°}{\sin 25°} \cdot \tan \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{\overline{CD} \cdot \sin 25°}{100 \cdot \sin 47°} = \frac{140{,}62\ldots \cdot \sin 25°}{100 \cdot \sin 47°}$$

$$\alpha = C\hat{A}D = \arctan\left(\frac{140{,}62\ldots \cdot \sin 25°}{100 \cdot \sin 47°}\right) = 39{,}096\ldots°$$

$$\simeq \boxed{39°}$$

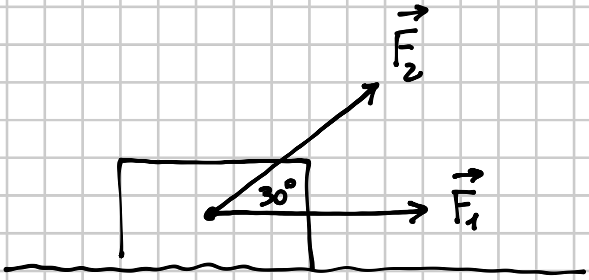
376 **MOTO RETTILINEO** Due forze $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, con $F_1 = 10$ N e $F_2 = 13$ N, sono applicate a una scatola di massa m posta su un piano orizzontale ruvido. $\vec{F_1}$ è orizzontale, $\vec{F_2}$ è inclinata di 30° verso l'alto. La scatola, inizialmente ferma, comincia a muoversi sotto l'azione delle due forze; dopo aver percorso 10 m la sua velocità è di 15 m/s.
Se $m = 1{,}5$ kg, determina:

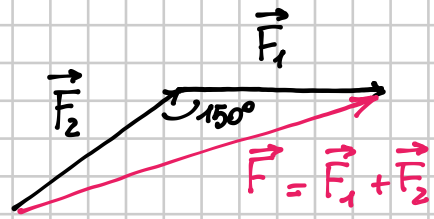
a. l'intensità della risultante di $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$;

b. il lavoro compiuto dalla forza di attrito;

c. il coefficiente di attrito tra il piano e la scatola. [a) 22 N; b) − 44 J; c) 0,54]

a)



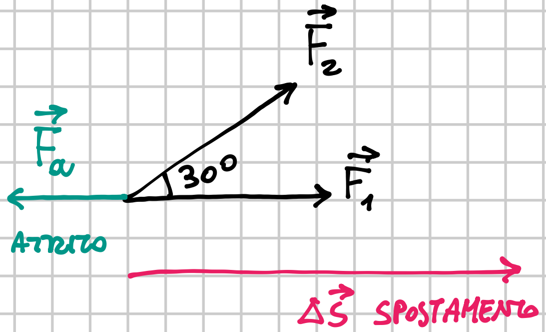


$F_1 = 10\text{N}$ $\quad F_2 = 13\text{N}$

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos 150°} =$$

$$= \sqrt{100 + 169 - 260\cos 150°}\ \text{N} = 22{,}2298\ldots\ \text{N} \simeq \boxed{22\ \text{N}}$$

b)



$$W_{TOT} = \vec{F_1}\cdot\Delta\vec{s} + \vec{F_2}\cdot\Delta\vec{s} + \overbrace{W_a}^{<0} \quad \text{LAVORO FORZA ATTRITO}$$

$$= (10\text{N})(10\text{m}) + (13\text{N})(10\text{m})\cdot\cos 30° + W_a$$

$$= K_{FIN.} - \underbrace{K_{IN.}}_{0} \quad (\text{TH. EN. CINETICA})$$

$$= \frac{1}{2}mv^2$$

$$W_a = \frac{1}{2}(1{,}5\ \text{kg})\left(15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - (10\text{N})(10\text{m}) - (13\text{N})(10\text{m})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= -43{,}833\ldots\ \text{J} \simeq \boxed{-44\ \text{J}}$$

c) $$W_a = -F_a\cdot\Delta s = -F_\perp\cdot\mu_a\cdot\Delta s = -(mg - \overbrace{F_2\cos 60°}^{\text{componente verticale di } \vec{F_2}})\cdot\mu_a\cdot\Delta s$$

$$\mu_a = \frac{W_a}{(F_2\cos 60° - mg)\cdot\Delta s} = \frac{-43{,}833\ldots\ \text{J}}{\left((13\ \text{N})\cdot\frac{1}{2} - (1{,}5\ \text{kg})(9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2})\right)(10\ \text{m})} = 0{,}5345\ldots \simeq \boxed{0{,}53}$$