EQUAZIONI DI 3° GRADO

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

$z = x - \frac{a}{3}$ (SOST. DI VARIABILE)

$$\boxed{x^3 + px + q = 0}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

(FORMULA DI CARDANO (1545) - ARS MAGNA)
IN REALTÀ DOVUTA A TARTAGLIA

Applichiamola all'eq. $x^3 - 3x = 0$ (di soluzioni $0, \pm\sqrt{3}$)

$p = -3$
$q = 0$ $\Rightarrow$ $x = \sqrt[3]{\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-1}}$ che <u>NON HA SENSO</u> !!

Eppure, se sostituiamo nell'eq. $x^3 - 3x = 0$ "facendo finta di niente" (denotiamo $\sqrt{-1} = i$)

$$\left(\sqrt[3]{i} + \sqrt[3]{-i}\right)^3 - 3\left(\sqrt[3]{i} + \sqrt[3]{-i}\right) =$$

$$= i + 3\sqrt[3]{-i^3} + 3\sqrt[3]{i^3} - i - 3\sqrt[3]{i} - 3\sqrt[3]{-i} = 0$$

<u>IDEA</u> $\rightsquigarrow$ inventare un simbolo per $\sqrt{-1} = i$

i è tale che $\boxed{i^2 = -1}$

PER QUESTO NUMERO VOGLIAMO CHE VALGANO LE "REGOLE ORDINARIE" DELL'ALGEBRA!

VOGLIAMO INOLTRE AMPLIARE IL SISTEMA NUMERICO $\mathbb{R}$ CON QUESTO <u>NUOVO</u> NUMERO i

<u>OSSERVAZIONE</u>

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$
$$\dots$$

Quindi il nuovo insieme numerico, detto INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI $\mathbb{C}$ basta che contenga oggetti del tipo $\boxed{a + ib}$ con $a, b \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ perché $a + ib$ è REALE se e solo se $b = 0$

L'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$, ma ha 2 soluzioni in $\mathbb{C}$: $\pm i$, infatti $i^2 + 1 = 0$ e $(-i)^2 + 1 = 0$

COME SI DOVREBBERO COMPORTARE LA SOMMA E IL PRODOTTO DI NUMERI COMPLESSI

$$z_1 = a + ib \qquad z_2 = c + id \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{z_1 + z_2 = a + ib + c + id = (a+c) + i(b+d)}$$ SOMMA

$$z = \underbrace{a}_{\substack{\text{PARTE REALE} \\ \text{DI } z}} + i \underbrace{b}_{\substack{\text{PARTE IMMAGINARIA} \\ \text{DI } z}}$$

$$a = \mathrm{Re}(z) \qquad b = \mathrm{Im}(z)$$

Il numero i si chiama UNITÀ IMMAGINARIA $(i^2 = -1)$

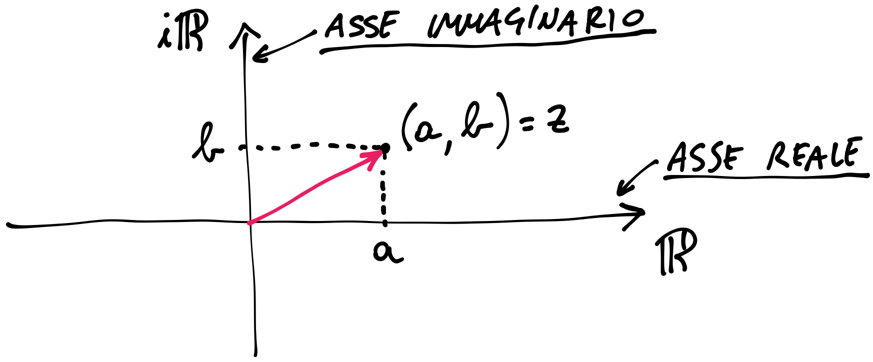
$$\boxed{\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc + i^2 bd = \\ &= ac + iad + ibc - bd = (ac - bd) + i(ad + bc) \end{aligned}}$$

INTRODUZIONE FORMALE DI $\mathbb{C}$

DEFINIZIONE

Chiamiamo **numero complesso** ogni coppia ordinata $(a; b)$ di numeri reali.

Possiamo anche dire che un numero complesso è un qualsiasi elemento dell'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.



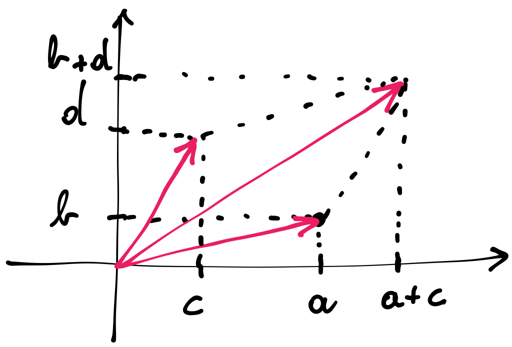
DEFINIZIONE

Somma di numeri complessi

Dati due numeri complessi $(a; b)$ e $(c; d)$, la loro somma è il numero complesso definito dalla coppia $(a + c; b + d)$.

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$$

REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA



- VALE LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA
- L'ELEMENTO NEUTRO È $(0, 0)$

  $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$
- L'OPPOSTO DI (a, b) È $(-a, -b)$

DEFINIZIONE

Prodotto di due numeri complessi

Dati due numeri complessi $(a; b)$ e $(c; d)$, il loro prodotto è il numero complesso definito dalla coppia $(ac - bd; ad + bc)$.

$$(a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc)$$

IDENTIFICHIAMO I NUMERI DEL TIPO $(a,0)$ CON I NUMERI REALI

$$(a,0) \longmapsto a$$

$$(a,0)\cdot(b,0) \longmapsto a\cdot b$$

$$\Downarrow$$

$$(a,0)\cdot(b,0) = (ab - 0, a\cdot 0 + 0\cdot b) = (ab, 0)$$

Prendiamo il numero $(0,1)$ e facciamone il quadrato

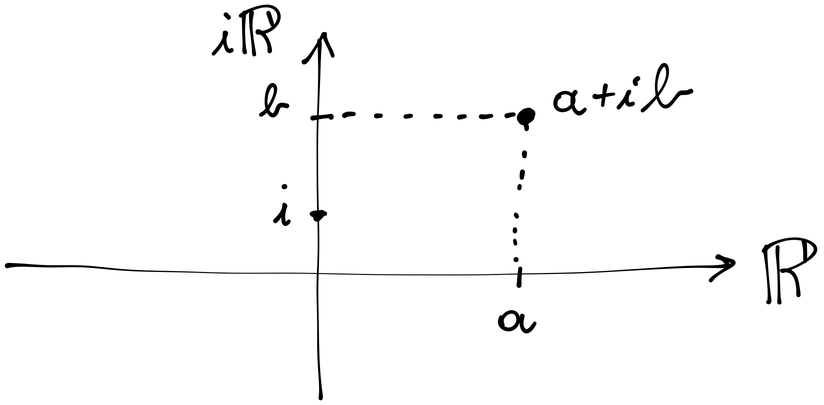
$$(0,1)^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) \longmapsto -1$$

$(0,1) = i$ $\quad i^2 = -1$ $\quad i =$ UNITÀ IMMAGINARIA

$$(a,b) = \underbrace{(a,0)}_{a\in\mathbb{R}} + \underbrace{\overbrace{(0,1)}^{i}\overbrace{(b,0)}^{b\in\mathbb{R}}}_{(0,b)}$$

$$\boxed{(a,b) = a + ib}$$

FORMA ALGEBRICA DEL NUMERO COMPLESSO (a,b)



$z=(a,b)=a+ib$

I numeri del tipo $(a,0)=a+i\cdot 0=a$ sono numeri reali

I numeri del tipo $(0,b)=0+ib=ib$ sono numeri immaginari

CALCOLARE SOMMA E PRODOTTO DEI SEGUENTI NUMERI COMPLESSI

31 $(4; 1)$; $(2; 0)$.

32 $(1; -2)$; $(-1; 3)$.

$\boxed{31}$ $(4+i)\cdot 2 = 8+2i$ $\quad$ $(4+i)+2 = 6+i$

$\boxed{32}$ $(1-2i)\cdot(-1+3i) = -1+3i+2i-6\cdot\underbrace{i^2}_{-1} = -1+5i+6 =$

$= 5+5i$

$(1-2i)+(-1+3i) = \cancel{1}-2i-\cancel{1}+3i = i$

33 $\overset{z_1}{\left(\frac{3}{2}; 2\right)}$; $\overset{z_2}{\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)}$.

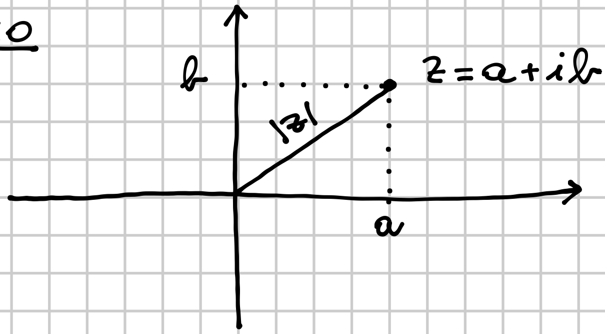
$z_1+z_2 = \frac{3}{2}+2i+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i = \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right)+i\left(2-\frac{1}{2}\right) = \frac{9+2}{6}+i\,\frac{4-1}{2} =$

$= \frac{11}{6}+\frac{3}{2}i$

$z_1\cdot z_2 = \left(\frac{3}{2}+2i\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}-\frac{3}{4}i+\frac{2}{3}i-\underbrace{i^2}_{-1} = \frac{1}{2}-\frac{3}{4}i+\frac{2}{3}i+1 =$

$= \frac{3}{2}+\frac{-9+8}{12}i = \frac{3}{2}-\frac{1}{12}i$

MODULO DI UN NUMERO COMPLESSO

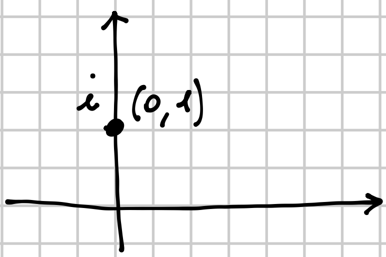


$z = a + ib$

$|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Calcola il modulo dei seguenti numeri complessi.

53 i; $\quad 3 + 4i$; $\quad 5$; $\quad 1 - i$.



$|i| = 1$

$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$|5| = 5$