RISOLVERE L'EQUAZIONE

194 $z^2 + |z|^2 = 4 + i$ $\left[\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}i; -\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}i\right]$

$z = x + iy \qquad |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$(x+iy)^2 + x^2 + y^2 - 4 - i = 0$

$x^2 - \cancel{y^2} + 2xyi + x^2 + \cancel{y^2} - 4 - i = 0$

$2x^2 - 4 + (2xy - 1)i = 0$

$\begin{cases} 2x^2 - 4 = 0 \\ 2xy - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 2 \\ 2xy - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = \frac{1}{2x} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

$$\boxed{z = -\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}i \quad \vee \quad z = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}i}$$

195 $|i + z|^2 - i = 2$ [impossibile]

$z = x + iy \qquad |i + x + iy|^2 - i = 2 \qquad |x + (y+1)i|^2 - i = 2$

$\underbrace{x^2 + (y+1)^2}_{|x+(y+1)i|^2} - i = 2 \qquad x^2 + y^2 + 1 + 2y - i = 2$

$\underbrace{x^2 + y^2 - 1 + 2y}_{\text{PARTE REALE}} - i = 0$

$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 + 2y = 0 \\ -1 = 0 \quad \text{IMPOSSIBILE} \end{cases}$

PARTE IMMAGINARIA

$$\boxed{z = 0 \iff \mathrm{Re}(z) = 0 \text{ E } \mathrm{Im}(z) = 0}$$

196 $|i+z|^2 - i - 2 = z$ $[2-i; -1-i]$

$z = x + iy$

$|i + x + iy|^2 - i - 2 = x + iy$

$|x + (y+1)i|^2 - i - 2 - x - iy = 0$

$x^2 + (y+1)^2 - 2 - x - (y+1)i = 0$

$x^2 + y^2 + 1 + 2y - 2 - x - (y+1)i = 0$

$x^2 + y^2 - x + 2y - 1 - (y+1)i = 0$

$\begin{cases} x^2 + y^2 - x + 2y - 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 \cancel{+1} - x - 2 \cancel{-1} = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-2)(x+1) = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

$$\boxed{z = 2 - i \quad \vee \quad z = -1 - i}$$

197 **TEST** Si denoti con $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, un generico numero complesso. Qual è l'insieme delle soluzioni di $|z+1|z = \bar{z}$?

A $\{0 \le x \le 2, y = 0\}$

B $\{-2 \le x \le 0, y = 0\}$

C $\{0\} \cup \{2\}$

~~**D**~~ $\{0\} \cup \{-2\}$

(*Università di Trento, Facoltà di Scienze*)

$|z+1|z = \bar{z}$

$\boxed{A}$ viene falsificata da $x = 1$ $(z = 1)$

$\boxed{B}$ viene falsificata da $x = -1$ $(z = -1)$

$\boxed{C}$ viene falsificata da $z = 2$

Per esclusione, la risposta è $\boxed{D}$

Risolviamo l'equazione

$|z+1|z = \bar{z}$ $\qquad z = x + iy$

$\downarrow$ MOLTIPLICO PER z ENTRAMBI I MEMBRI

$|z+1|z^2 = \bar{z}z$

$\underbrace{|z+1|}_{\text{NUMERO REALE}} z^2 = \underbrace{|z|^2}_{\text{NUMERO REALE}} \Rightarrow z^2$ deve essere un numero reale

$(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

Siccome è reale, deve essere $2xy = 0$

$\Downarrow$

$x = 0 \vee y = 0$

1) $y = 0 \Rightarrow z = x$ reale

$|x+1|x^2 = x^2 \Rightarrow |x+1|x^2 - x^2 = 0 \qquad x^2(|x+1| - 1) = 0$

$\Downarrow$

$x = 0 \vee |x+1| - 1 = 0$

$|x+1| = 1$

$x + 1 = \pm 1$

$x = 0 \vee x = -2$

$z = 0 \vee z = -2$

2) $x = 0 \Rightarrow z = iy \qquad \underbrace{|iy+1|}_{\ge 0} \underbrace{(-y^2)}_{\le 0} = \underbrace{|iy|^2}_{\ge 0} \Rightarrow y = 0$

Le uniche soluzioni sono date da $\boxed{z = 0 \vee z = -2}$

207 $|z| = 2$

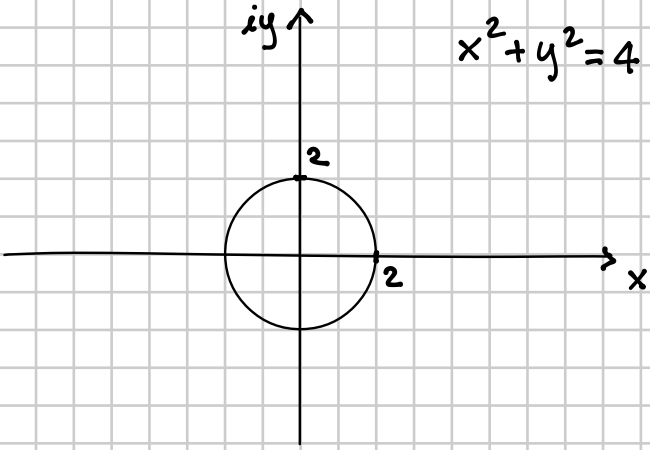
RAPPRESENTARE NEL PIANO DI GAUSS

$z = x + iy$

$|x + iy| = 2 \qquad \sqrt{x^2 + y^2} = 2$

$x^2 + y^2 = 4$

CIRCONFERENZA DI CENTRO $O(0,0)$ E RAGGIO 2



217 $|2z - 3| = |z + i|$

RAPPRESENTARE

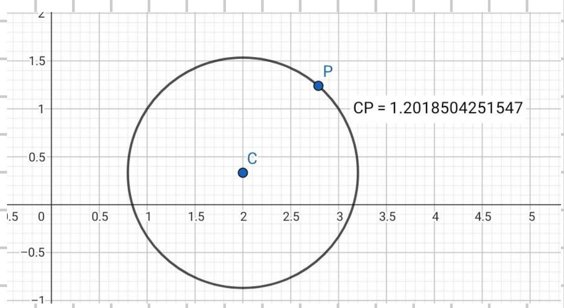
$z = x + iy$

$|2(x + iy) - 3| = |x + iy + i|$

$|2x + 2iy - 3| = |x + (y+1)i|$

$|2x - 3 + 2yi| = |x + (y+1)i|$

$\sqrt{(2x-3)^2 + 4y^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$



$4x^2 + 9 - 12x + 4y^2 = x^2 + y^2 + 1 + 2y$

$3x^2 + 3y^2 - 12x - 2y + 8 = 0 \qquad x^2 + y^2 - 4x - \frac{2}{3}y + \frac{8}{3} = 0$

$C\left(2, \frac{1}{3}\right) \qquad r = \sqrt{4 + \frac{1}{9} - \frac{8}{3}} =$

$= \sqrt{\frac{36 + 1 - 24}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

CIRCONF. DI CENTRO $C\left(2, \frac{1}{3}\right)$ E RAGGIO $\frac{\sqrt{13}}{3}$