276 $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$, $\quad z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. $\quad \left[\frac{3+\sqrt{3}}{4} + i\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right]$

CALCOLARE IL PRODOTTO

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{11}{6}\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{22+3}{12}\pi + i\sin\frac{22+3}{12}\pi\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{25}{12}\pi + i\sin\frac{25}{12}\pi\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + 2\pi\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}\left[\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right] = \frac{6+\sqrt{12}}{8} + i\,\frac{6-\sqrt{12}}{8} =$$

$$= \frac{6+2\sqrt{3}}{8} + i\,\frac{6-2\sqrt{3}}{8} = \frac{\cancel{2}(3+\sqrt{3})}{\cancel{8}_4} + \frac{\cancel{2}(3-\sqrt{3})}{\cancel{8}_4}i =$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{4} + \frac{3-\sqrt{3}}{4}i$$

CALCOLARE IL PRODOTTO SIA IN FORMA ALGEBRICA CHE TRIGONOMETRICA

287 $(\sqrt{3} - i)(1 + \sqrt{3}\,i)$ $[2\sqrt{3} + 2i]$

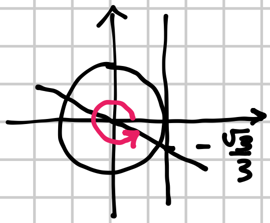
IN F. ALGEBRICA $(\sqrt{3} - i)(1 + \sqrt{3}i) = \sqrt{3} + 3i - i + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2i$

IN F. TRIGON.

$$z_1 = \sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i \sin\frac{11}{6}\pi\right)$$

$$\rho = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\tan\vartheta = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \vartheta = \frac{11}{6}\pi$$



$$z_2 = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rho = \sqrt{1+3} = 2 \qquad \tan\vartheta = \sqrt{3} \qquad \vartheta = \frac{\pi}{3}$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 2\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{11}{6}\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 4\left(\cos\frac{11+2}{6}\pi + i \sin\frac{13}{6}\pi\right) =$$

$$= 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right)\right) =$$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2i$$

RADICI M-ESIME DELL'UNITÀ

Si chiama **RADICE M-ESIMA DELL'UNITÀ** (con $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$) ogni numero complesso z tale che $z^m = 1$

ESEMPI

1) CASO $m = 2$ le radici quadrate di 1 sono $z_0 = 1$

$z_1 = -1$

2) CASO $m = 3$. Andiamo alla ricerca delle radici cubiche dell'unità

$$z^3 = 1 \qquad\qquad z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

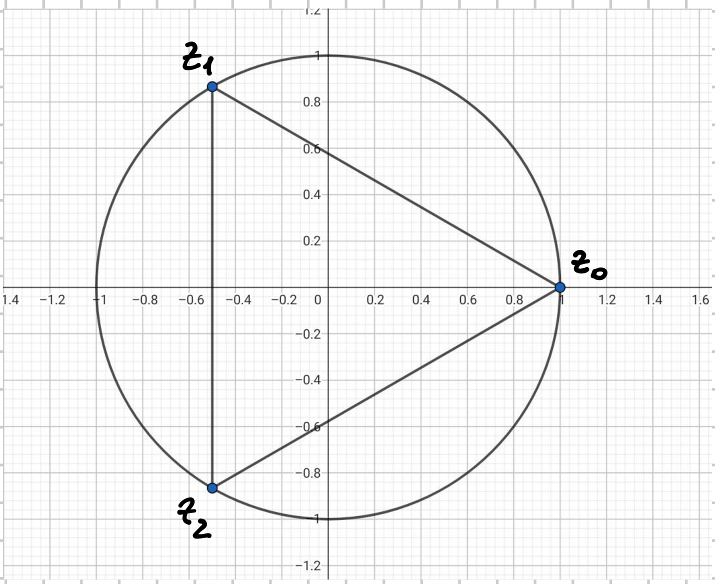
$$\rho^3(\cos 3\vartheta + i\sin 3\vartheta) = 1$$

$$\rho^3 = 1 \Rightarrow \rho = 1$$

$$\begin{cases} \cos 3\vartheta = 1 \\ \sin 3\vartheta = 0 \end{cases} \Rightarrow 3\vartheta = 2k\pi \Rightarrow \vartheta = \frac{2k\pi}{3} \qquad k = 0, 1, 2$$

$$\begin{cases} z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1 \\ z_1 = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

SONO LE 3 RADICI CUBICHE DI 1



In generale l'equazione $z^n = 1$ ha n soluzioni, vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di centro $O(0,0)$ e raggio 1

In generale le radici n-esime dell'unità sono date dalla formula

$$\boxed{z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad k = 0,1,2,\dots,n-1}$$

3) caso $n = 4$

$$z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$z_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$z_3 = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = -i$$