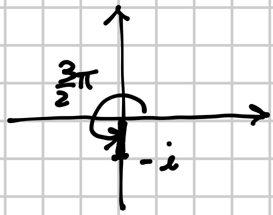
Trovare le radici CUBICHE di

375 $$\left(\frac{2-2i}{2+2i}\right)^5 \qquad \left[i, +\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i), \frac{1}{2}(-\sqrt{3}-i)\right]$$

$$\frac{2-2i}{2+2i}\cdot\frac{2-2i}{2-2i}=\frac{\cancel{4}-\cancel{4}-8i}{4+4}=-\frac{8}{8}i=-i$$

$$\left(\frac{2-2i}{2+2i}\right)^5=(-i)^5=-i^5=-i^4\cdot i=-i$$

Quindi si tratta di trovare le radici cubiche di $-i=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi$



$\rho=1 \quad \vartheta=\frac{3}{2}\pi$

$$z_K=\rho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\vartheta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right]$$

$K=0,1,\dots,n-1$

$$z_0=\cos\frac{\frac{3}{2}\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3}{2}\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=\boxed{i}$$

$\frac{2\pi}{3}$

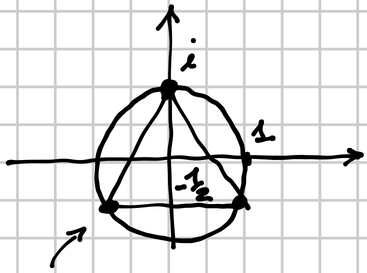
$$z_1=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi\right)=$$

$$=\cos\frac{3\pi+4\pi}{6}+i\sin\frac{7}{6}\pi=\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$$

$\frac{2\pi}{3}$

$$z_2=\cos\left(\frac{7}{6}\pi+\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{7}{6}\pi+\frac{2}{3}\pi\right)=$$

$$=\cos\frac{7\pi+4\pi}{6}+i\sin\frac{11}{6}\pi=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$$



VERTICI DEL TRIANGOLO EQUILATERO

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

- $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$
- $P(z)$ POLINOMIO DI GRADO n A COEFFICIENTI IN $\mathbb{C}$
- a coefficiente di z^n in $P(z)$

$\Rightarrow \exists\, z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ tali che $P(z) = a(z-z_1)(z-z_2)\cdot \dots \cdot(z-z_n)$

EQUIVALENTEMENTE

Ogni equazione algebrica (polinomiale) di grado n in campo complesso

$$\underbrace{P(z)}_{\text{POLINOMIO DI GRADO } n} = 0$$

ha n soluzioni (pur di contare ogni soluzione secondo la sua MOLTEPLICITÀ)

COROLLARIO

$n \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$

$P(z)$ POLINOMIO DI GRADO n A COEFFICIENTI IN $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ le soluzioni di $P(z) = 0$ sono a due a due coniugate, e 2 soluzioni coniugate hanno la stessa molteplicità

$\Rightarrow$ ogni equazione algebrica (a coeff. reali) di grado dispari ha almeno una soluzione reale