FORMA ESPONENZIALE DI UN NUMERO COMPLESSO

DEFINIZIONE

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ $\quad (z = x + iy)$

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y)$$ ESPONENZIALE COMPLESSO

In particolare:

per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$ $\quad \boxed{e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i \sin\vartheta}$

Quindi ogni numero complesso z si può scrivere

$$z = \rho e^{i\vartheta}$$ $\rho = |z|$ MODULO DI z

Si ha:

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i \sin\pi = -1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

FORMULA PIÙ BELLA DELLA MATEMATICA

$\downarrow$

compaiono i cinque numeri fondamentali $e, i, \pi, 1, 0$ e le relazioni $+, =$

TEOREMA

Per ogni coppia di numeri complessi z_1, z_2 si ha:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

OSSERVAZIONI

1) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ dunque l'esponenziale complesso NON SI ANNULLA MAI

2) $e^{z_1} = e^{z_2}$ se e solo se $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ $k \in \mathbb{Z}$ dunque l'esponenziale complesso NON È INIETTIVO

ES.

$z_1 = 3+5i$ $\qquad z_1 \neq z_2$

$z_2 = 3+(5+2\pi)i$

$$e^{z_2} = e^{3+(5+2\pi)i} = e^3\left(\cos(5+2\pi) + i\sin(5+2\pi)\right) =$$

$$= e^3(\cos 5 + i \sin 5) = e^{3+5i} = e^{z_1}$$

3) $z^n = (\rho e^{i\vartheta})^n = \rho^n e^{in\vartheta}$

Formule di Eulero

Consideriamo le uguaglianze $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ ed $e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$.

- Sommiamo membro a membro:

$$\begin{array}{rl} & e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \\ + & e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha \\ \hline & e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha \quad \to \end{array}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}}.$$

- Sottraiamo membro a membro:

$$\begin{array}{rl} & e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \\ - & e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha \\ \hline & e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i\sin\alpha \quad \to \end{array}$$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}}.$$

Le quattro formule evidenziate sono dette **formule di Eulero**.

Per $\alpha = \pi$ la prima formula è $e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$: $\boldsymbol{e^{\pi i} + 1 = 0}$, dove compaiono insieme cinque numeri importanti: 1, 0, e, π, i.

399 $x^2 \overbrace{-(2+2i)}^{b}x + \overbrace{2i-1}^{c} = 0$ $[i, 2+i]$

$$x^2 - 2\overbrace{(1+i)}^{\beta}x + 2i - 1 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = (1+i)^2 - 2i + 1 = 1 + i^2 + \cancel{2i} - \cancel{2i} + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$x = 1 + i \pm 1 = \begin{cases} 1+i-1 = i \\ i+i+1 = 2+i \end{cases}$$

$$\boxed{x = i \ \vee \ x = 2+i}$$

371 $z = \sqrt{\dfrac{i}{1-\sqrt{3}\,i}}$ Calcolare le 2 radici quadrate

$$\frac{i}{1-\sqrt{3}i} \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{i-\sqrt{3}}{1+3} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = (*)$$

$$\rho = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \qquad \vartheta = \frac{5}{6}\pi$$

$$(*) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\cos\underbrace{\frac{5}{12}\pi}_{\frac{\frac{5}{6}\pi}{2}} + i\sin\frac{5}{12}\pi\right) \qquad z_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$$

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}+1}{4} \qquad z_1 = -\frac{\sqrt{3}-1}{4} - i\,\frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

Calcoliamo le radici quarte di $z = -256 = -2^8$

$$z = 2^8 \cdot (-1) = 2^8 \left(\cos \pi + i \sin \pi\right)$$

$$z_0 = \underbrace{\sqrt[4]{2^8}}_{2^{\frac{8}{4}} = 2^2 = 4} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + i\, 2\sqrt{2}$$

$$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$z_1 = 4 \left(\cos \left(\underbrace{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}}_{\frac{3}{4}\pi}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2} + i\, 2\sqrt{2}$$

$$z_2 = 4 \left(\cos \left(\underbrace{\frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{2}}_{\frac{5}{4}\pi}\right) + i \sin \left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2} - i\, 2\sqrt{2}$$

$$z_3 = 4 \left(\cos \left(\underbrace{\frac{5}{4}\pi + \frac{\pi}{2}}_{\frac{7}{4}\pi}\right) + i \sin \left(\frac{5}{4}\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} - i\, 2\sqrt{2}$$