412 Indicato con $\bar{z}$ il complesso coniugato di $z = x + yi$, scrivi l'equazione $\bar{z} = z^2$. Dimostra che i soli quattro numeri complessi $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sono soluzioni dell'equazione. Determina poi il modulo di z_3 e rappresenta nel piano di Gauss il vettore $v = z_2 + 4z_3$. $[|z_3| = 1]$

$$\bar{z} = z^2 \qquad z = x + iy$$

$$x - iy = (x + iy)^2$$

$$x - iy = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$x - x^2 + y^2 - iy - 2xyi = 0$$

$$x - x^2 + y^2 - i(y + 2xy) = 0 \iff \begin{cases} x - x^2 + y^2 = 0 \\ y + 2xy = 0 \end{cases}$$

$$y + 2xy = 0 \qquad y(1 + 2x) = 0 \Rightarrow y = 0 \lor 1 + 2x = 0$$

$$\Rightarrow \underset{①}{y = 0} \lor \underset{②}{x = -\frac{1}{2}}$$

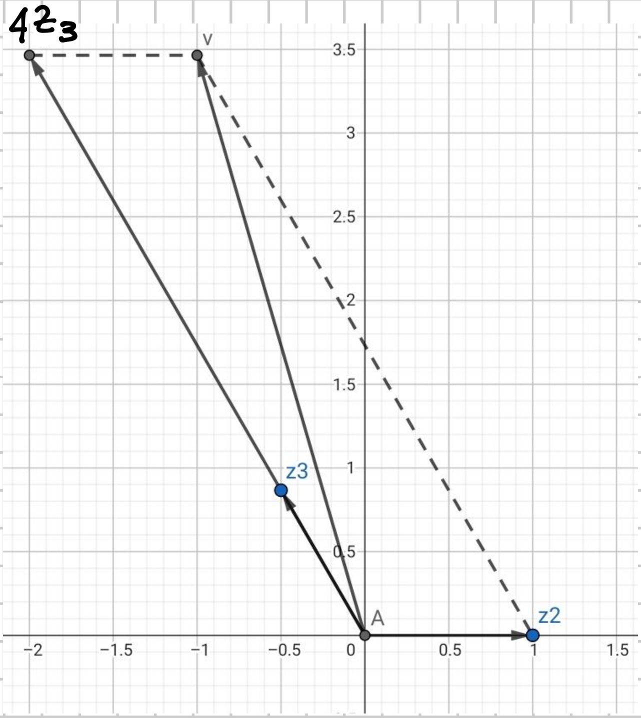
① $$\begin{cases} y = 0 \\ x - x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x - x^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x(1 - x) = 0 \end{cases} \begin{matrix} x = 0 \\ \lor \\ x = 1 \end{matrix} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \lor \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

② $$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x - x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + y^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} z_1 = 0 \qquad z_2 = 1 \\ z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{matrix}}$$

$$|z_3| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$v = z_2 + 4z_3$ $\qquad z_2 = 1 \qquad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$



413 È data l'equazione $z^5 - z^4 + 9z - 9 = 0$, dove $z \in \mathbb{C}$. Verifica che $z = 1$ è una radice e dopo avere abbassato il grado dell'equazione determina le restanti radici. Rappresenta le soluzioni nel piano di Gauss.

$\left[\frac{\sqrt{6}}{2}(1+i), \frac{\sqrt{6}}{2}(-1+i), \frac{\sqrt{6}}{2}(-1-i), \frac{\sqrt{6}}{2}(1-i)\right]$

$$z^5 - z^4 + 9z - 9 = 0$$

$$z^4(z-1) + 9(z-1) = 0 \Rightarrow (z-1)(z^4+9) = 0$$

1 è soluzione

$$z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1$$

$$z^4 + 9 = 0 \Rightarrow z^4 = -9$$

DEVO CALCOLARE LE RADICI QUARTE DI -9

$$-9 = 9(-1) = 9(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$z_0 = \sqrt[4]{9}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}(1+i)$$

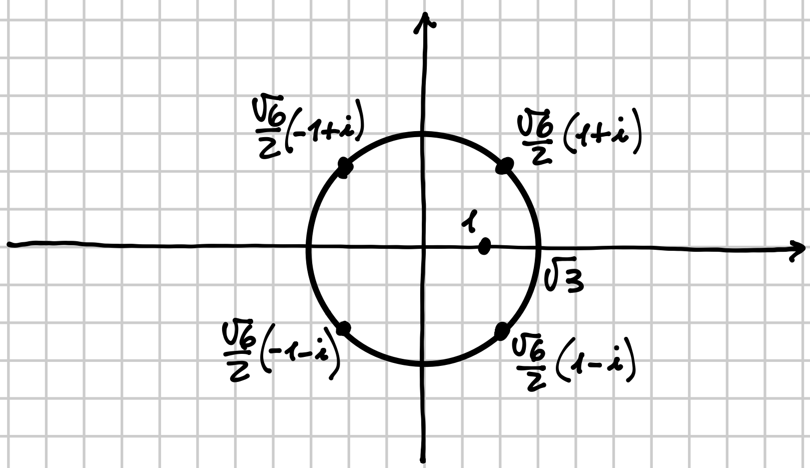
$\frac{2\pi}{4}$

$$z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}(-1+i)$$

Le altre 2 radici sono le coniugate di quelle che abbiamo già trovato

$z_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}(-1-i) \qquad z_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}(1-i)$



Calcolare il valore dell'espressione:

28 $\frac{1+2i}{3-2i}+\frac{1-i}{1+2i}+\frac{1-i}{5}-\frac{i(i-1)}{13}=$

$$=\frac{1+2i}{3-2i}\cdot\frac{3+2i}{3+2i}+\frac{1-i}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i}+\frac{1-i}{5}-\frac{i^2-i}{13}=$$

$$=\frac{3+2i+6i-4}{9+4}+\frac{1-2i-i-2}{1+4}+\frac{1-i}{5}-\frac{i^2-i}{13}=$$

$$=\frac{-1+8i}{13}+\frac{-1-3i}{5}+\frac{1-i}{5}-\frac{-1-i}{13}=$$

$$=\frac{\cancel{-1}+8i+\cancel{1}+i}{13}+\frac{\cancel{-1}-3i+\cancel{1}-i}{5}=\frac{9}{13}i-\frac{4}{5}i=\frac{45-52}{65}i=\boxed{-\frac{7}{65}i}$$