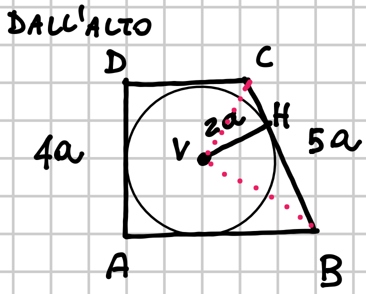
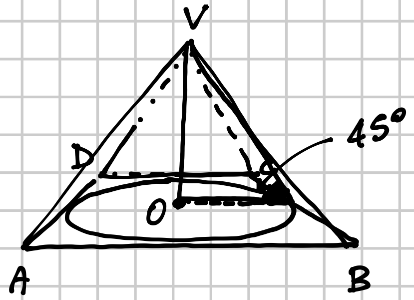
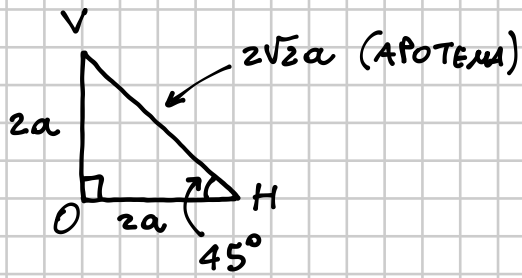
68 Una piramide retta di vertice V ha come base un trapezio rettangolo $ABCD$, circoscritto a una circonferenza di raggio $2a$, il cui lato obliquo BC misura $5a$. Il piano che contiene la faccia BVC forma con il piano di base un angolo di 45°. Determina il volume e l'area della superficie totale della piramide.

[Volume $=12a^3$, Area $=18a^2(1+\sqrt{2})$]







$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{(\overline{AB}+\overline{DC})\cdot\overline{DA}}{2} = \frac{9a\cdot\cancel{4}^{\,2}a}{\cancel{2}} = 18a^2$$

In un quadrilatero circoscritto a una circonferenza le somme dei lati opposti sono uguali: $\overline{AB}+\overline{DC} = \overline{AD}+\overline{CB}$

$$V = \frac{1}{\cancel{3}}\cdot \cancel{18}^{\,6}a^2\cdot 2a = \boxed{12a^3}$$

$$A_{LATERALE} = p\cdot APOTEMA = 9a\cdot 2\sqrt{2}a = 18\sqrt{2}a^2$$

$$A_{BASE} = 18a^2$$

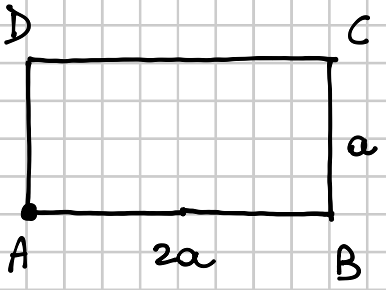
$$A_{TOT.} = 18a^2 + 18\sqrt{2}a^2 = \boxed{18(\sqrt{2}+1)a^2}$$

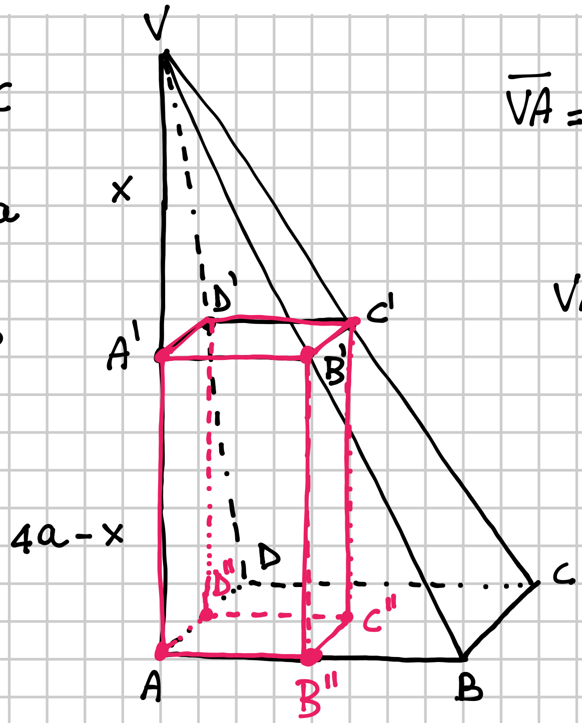
75 Una piramide ha come base un rettangolo $ABCD$, in cui $\overline{AB} = 2a$ e $\overline{BC} = a$. Il vertice V della piramide appartiene alla perpendicolare in A al piano che contiene la base $ABCD$ e risulta $\overline{VA} = 4a$. Traccia un piano parallelo alla base della piramide e considera il parallelepipedo che ha come basi la sezione della piramide con il piano e la proiezione della sezione stessa sul piano di base.

a. A quale distanza dal vertice della piramide va condotto il piano, in modo che l'area della superficie del parallelepipedo sia massima?

b. Qual è il rapporto tra il volume del parallelepipedo di cui al punto **a** e il volume della piramide?

$\left[\textbf{a. } \frac{12}{5}a; \textbf{ b. } \frac{54}{125}\right]$





$\overline{VA} = 4a \qquad 0 < x < 4a$

VAB e VA'B' sono SIMILI

$$x : \overline{A'B'} = 4a : 2a$$

$\uparrow$ VA' $\qquad$ $\uparrow$ VA $\qquad$ $\uparrow$ AB

$$\overline{A'B'} = \frac{2ax}{4a} = \frac{1}{2}x$$

Analogamente, anche VAD e VA'D' sono SIMILI

$$x : \overline{A'D'} = 4a : a \Rightarrow \overline{A'D'} = \frac{\cancel{a}x}{4\cancel{a}} = \frac{1}{4}x$$

$$S_{TOT.} = 2\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}x(4a-x)}_{\mathcal{A}_{AB''B'A'}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}x \cdot \tfrac{1}{4}x}_{\mathcal{A}_{A'B'C'D'}} + \underbrace{\tfrac{1}{4}x \cdot (4a-x)}_{\mathcal{A}_{AD''D'A'}}\Big) =$$

$$= x(4a-x) + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x(4a-x) = 4ax - x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 2ax - \frac{1}{2}x^2 =$$

$$= -\frac{5}{4}x^2 + 6ax \Rightarrow S_{TOT} = -\frac{5}{4}x^2 + 6ax \qquad 0 < x < 4a$$

$\uparrow$ EQUAZIONE DI UNA PARABOLA $\Rightarrow$ IL MAX È IN CORRISPONDENZA DEL VERTICE

x DEL VERTICE $\downarrow$

$$x_{MAX} = \frac{-6a}{2\left(-\frac{5}{4}\right)} = \boxed{\frac{12}{5}a}$$

b) $V_{PIRAMIDE} = \frac{1}{3} A_{BASE} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2a^2 \cdot 4a = \frac{8}{3} a^3$

$\overline{AA'} = 4a - x = 4a - \frac{12}{5} a = \frac{8}{5} a$

$\overline{A'B'} = \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{5} a = \frac{6}{5} a$ $\qquad$ $\overline{A'D'} = \frac{1}{4} x = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{5} a = \frac{3}{5} a$

$V_{PARALLELEPIPEDO} = \left(\frac{8}{5} a\right) \cdot \left(\frac{6}{5} a\right)\left(\frac{3}{5} a\right) = \frac{18 \cdot 8}{125} a^3$

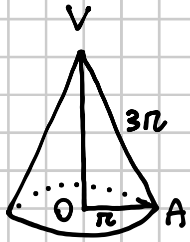
$$\frac{V_{PARALL.}}{V_{PIR.}} = \frac{\frac{18 \cdot 8}{125} \cancel{a^3}}{\frac{8}{3} \cancel{a^3}} = \frac{18 \cdot \cancel{8}}{125} \cdot \frac{3}{\cancel{8}} = \boxed{\frac{54}{125}}$$

112 Un cono ha l'apotema triplo del raggio di base e la superficie laterale di area $12\pi\ \text{cm}^2$. Determina:

a. il volume del cono;

b. l'area della sezione del cono con un piano parallelo alla base che lo divide in due parti equivalenti.

$\left[\mathbf{a.}\ \dfrac{16\pi\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}^3;\ \mathbf{b.}\ 2\pi\sqrt[3]{2}\ \text{cm}^2\right]$



$\overline{AV} = 3\overline{OA} = 3r$ (APOTEMA)

$$\mathcal{A}_{LAT.} = \frac{1}{2}\,2\pi r \cdot 3r = 3\pi r^2$$

$$\Downarrow$$

$$3\pi r^2 = 12\pi$$

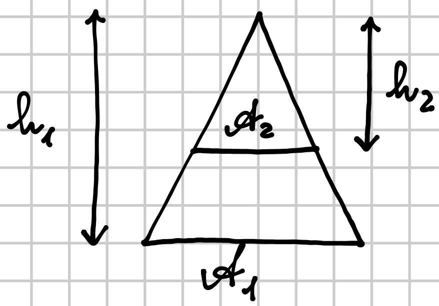
$$r^2 = 4 \Rightarrow r = 2\ (\text{cm})$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{VA} = 6$$

ALTEZZA $\overline{VO} = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$$V_{CONO} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{BASE} \cdot h = \frac{1}{3}\,4\pi \cdot 4\sqrt{2} = \frac{16}{3}\sqrt{2}\,\pi\ (\text{cm}^3)$$



$$\underbrace{\mathcal{A}_2 \cdot h_2}_{\text{VOLUME CONO SUPERIORE}} = \underbrace{\mathcal{A}_1 h_1 - \mathcal{A}_2 h_2}_{\text{VOLUME TRONCO DI CONO}}$$

$$\mathcal{A}_1 h_1 = 2\mathcal{A}_2 h_2$$

VALE LA PROPORZIONE

$$\mathcal{A}_1 : h_1^2 = \mathcal{A}_2 : h_2^2$$

$$\begin{cases} 4\pi \cdot 4\sqrt{2} = 2\mathcal{A}_2 h_2 \\ 4\pi : 32 = \mathcal{A}_2 : h_2^2 \end{cases}$$

$$\frac{4\pi}{32} = \frac{\mathcal{A}_2}{h_2^2}$$

$$\begin{cases} 8\pi\sqrt{2} = \mathcal{A}_2 h_2 \\ \mathcal{A}_2 = \frac{\pi}{8} h_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_2 = \dfrac{8\pi\sqrt{2}}{\mathcal{A}_2} \\ \mathcal{A}_2 = \dfrac{\pi}{\cancel{8}}\,\dfrac{8^{\cancel{2}}\pi^2 \cdot 2}{\mathcal{A}_2^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathcal{A}_2^3 = 16\pi^3 \\ \mathcal{A}_2 = \sqrt[3]{16\pi^3} = \boxed{2\sqrt[3]{2}\,\pi}\ (\text{cm}^2) \end{array}$$