IL PRODOTTO SCALARE DI 2 VETTORI

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ $\qquad$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ $\qquad$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\vartheta$

l'angolo CONVESSO compreso tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE

1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ infatti $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\vec{a}|^2$

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

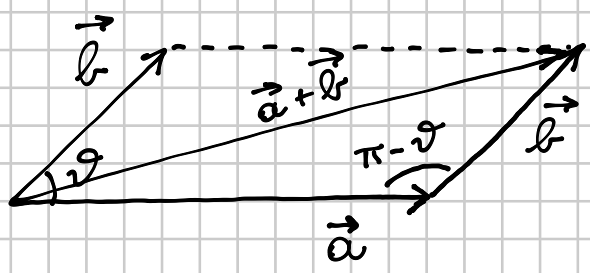
3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

infatti

$$(a_x, a_y, a_z) \cdot (b_x + c_x, b_y + c_y, b_z + c_z) = a_x (b_x + c_x) + a_y (b_y + c_y)$$

$$+ a_z (b_z + c_z) = \underline{a_x b_x} + \underline{\underline{a_x c_x}} + \underline{a_y b_y} + \underline{\underline{a_y c_y}} + \underline{a_z b_z} + \underline{\underline{a_z c_z}} =$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$



TH. DEL COSENO (CARNOT)

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos(\pi - \vartheta)$$

$$= \underbrace{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\vartheta}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 \underset{\text{PROPR. 1)}}{=} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \underset{\text{PROPR. 2) E 3)}}{=} \underbrace{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\, \vec{a} \cdot \vec{b}}$$

DEVONO ESSERE UGUALI

$\Downarrow$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\vartheta$$

Quindi i 2 modi di calcolo del prodotto scalare sono equivalenti

81 $\vec{v}(1;4;12)$, $\vec{w}\left(\frac{1}{4};1;3\right)$.

STABILIRE SE SONO $//$, $\perp$ o nessuno dei due

Sono paralleli sse $\vec{v} = k\vec{w}$

Sono perpendicolari sse $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

$\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono paralleli perché $\vec{v} = 4\vec{w} = 4\left(\frac{1}{4}, 1, 3\right) = (1, 4, 12)$

Oppure si controlla che il rapporto tra le componenti è costante:

$$\frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{1} = \frac{12}{3} = 4$$

Se $\vec{v} = (1, 4, 12)$ si ha che $v = |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{1 + 16 + 144} =$

$= \sqrt{161}$

110 Scrivi l'equazione dei piani che hanno le seguenti caratteristiche.

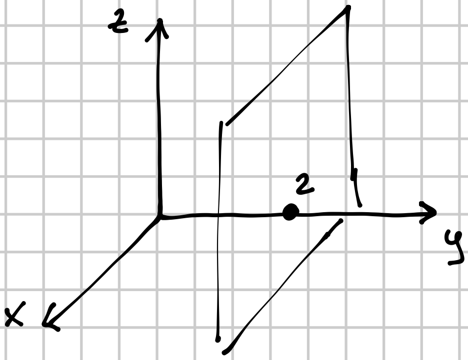
a. Passa per il punto $A(1; 2; 0)$ ed è perpendicolare all'asse y.

b. Passa per il punto $B(1; 1; 6)$ ed è perpendicolare all'asse z.

c. Passa per il punto $C(1; 2; 5)$ ed è parallelo al piano Oxy.

d. Passa per il punto $D(0; 1; 2)$ ed è perpendicolare all'asse y. [a) $y = 2$; b) $z = 6$; c) $z = 5$; d) $y = 1$]

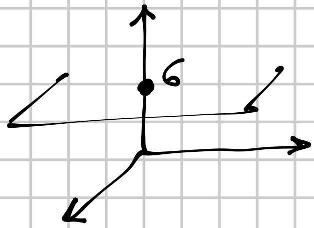
a)



$y = $ costante $\quad A(1, 2, 0)$

$y = 2$

b) $\perp$ asse z passante per $B(1, 1, 6) \Rightarrow z = 6$



c) // piano Oxy è sinonimo di $\perp$ asse $z \Rightarrow z = 5$

d) $\perp$ asse $y \Rightarrow y = $ costante $\Rightarrow y = 1$

Scrivere l'equazione del piano passante per A, B, C

122 $A(-1; 0; 3)$, $B(2; 4; 1)$, $C(5; 2; 1)$. $[2x + 3y + 9z - 25 = 0]$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{array}{l} A \rightarrow \\ B \rightarrow \\ C \rightarrow \end{array} \begin{cases} -a + 3c + d = 0 \\ 2a + 4b + c + d = 0 \\ 5a + 2b + c + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 3c + d \\ 2(3c+d) + 4b + c + d = 0 \\ 5(3c+d) + 2b + c + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3c + d \\ 6c + 2d + 4b + c + d = 0 \\ 15c + 5d + 2b + c + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} // \\ 4b + 7c + 3d = 0 \\ 2b + 16c + 6d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ 4(-8c - 3d) + 7c + 3d = 0 \\ b = -8c - 3d \end{cases} \qquad \begin{cases} // \\ -32c - 12d + 7c + 3d = 0 \\ // \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ -25c = 9d \\ // \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 3c + d \\ c = -\frac{9}{25} d \\ b = -8c - 3d \end{cases}$$

ASSEGNO A d UN VALORE OPPORTUNO $\neq 0$

$$d = -25$$

$$\begin{cases} a = 27 - 25 = 2 \\ c = 9 \\ b = -72 + 75 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 9 \\ d = -25 \end{cases}$$

$$\boxed{2x + 3y + 9z - 25 = 0}$$