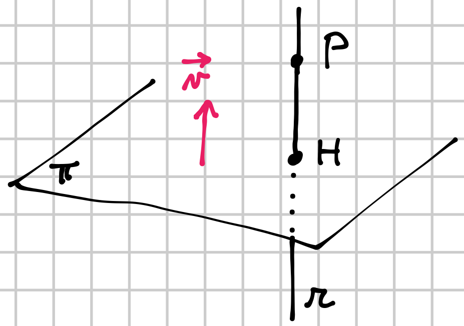
3 Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, è dato il piano $\pi : 3x - 2y + 5 = 0$.

– Determinare le coordinate del punto H, proiezione ortogonale di $P(4; 2; 1)$ sul piano π.

– Determinare l'intersezione della retta $s : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$ con il piano π.



retta per $P(4,2,1)$ perpendicolare a π, di vettore normale $\vec{n} = (3,-2,0)$ $\Rightarrow$ $r: \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$

Interseco la retta r col piano $\pi: 3x - 2y + 5 = 0$

$$3(4+3t) - 2(2-2t) + 5 = 0$$
$$12 + 9t - 4 + 4t + 5 = 0$$
$$13t = -13 \Rightarrow t = -1$$

$$H(4-3,\ 2-2(-1),\ 1) = \boxed{(1,4,1)}$$

Determino il punto di intersezione fra la retta $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$ e il piano $\pi: 3x - 2y + 5 = 0$

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2(x+1) + 5 = 0 \\ y = x + 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2x - 2 + 5 = 0 \\ y = x + 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \qquad \boxed{Q(-3,-2,2)}$$

292 Scrivi l'equazione del piano α passante per il punto $A(0;2;-1)$ e parallelo al piano π contenente la retta r di equazioni $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{2}=z+1$ e il punto $B(0;10;-1)$. $[7x+y-16z-18=0]$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2}=t \\ \frac{y-3}{2}=t \\ z+1=t \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1+2t \\ y=3+2t \\ z=-1+t \end{cases}$$

$t=0 \Rightarrow P(1,3,-1)$

$t=1 \Rightarrow Q(3,5,0)$

$B(0,10,-1)$

PIANO PASSANTE PER P, Q, B: $\quad ax+by+cz+d=0$

$P(1,3,-1)$

$Q(3,5,0)$

$B(0,10,-1)$

$$\begin{cases} a+3b-c+d=0 \\ 3a+5b+d=0 \\ 10b-c+d=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+3b-10b-\cancel{d}+\cancel{d}=0 \\ 3a+5b+d=0 \\ c=10b+d \end{cases} \qquad \begin{cases} a=7b \\ 21b+5b+d=0 \\ c=10b+d \end{cases} \qquad \begin{cases} a=7b \\ d=-26b \\ c=-16b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=7 \\ b=1 \\ c=-16 \\ d=-26 \end{cases} \qquad \pi: \ 7x+y-16z-26=0$$

Il piano α è parallelo a π, dunque ha lo stesso vettore normale: passa per $A(0,2,-1)$

$$7(x-0)+1\cdot(y-2)-16(z+1)=0$$

$$7x+y-2-16z-16=0 \qquad \boxed{7x+y-16z-18=0}$$

293 Scrivi l'equazione del piano α contenente la retta r di equazioni $\begin{cases} x-y+z+2=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$ e perpendicolare alla retta s di equazioni $\frac{x-1}{3}=y-1=z-1$. $[3x+y+z+4=0]$

$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$ ha direzione $\vec{v}(3,1,1)$, che è anche il vettore normale del piano

Trovo un punto qualsiasi della retta $\begin{cases} x-y+z+2=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$

Scelgo $z=-2 \Rightarrow \begin{cases} x-y-2+2=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=y \\ 2y+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=y \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2\right)$

Il piano α è $3\left(x+\frac{1}{2}\right)+1\cdot\left(y+\frac{1}{2}\right)+1\cdot(z+2)=0$

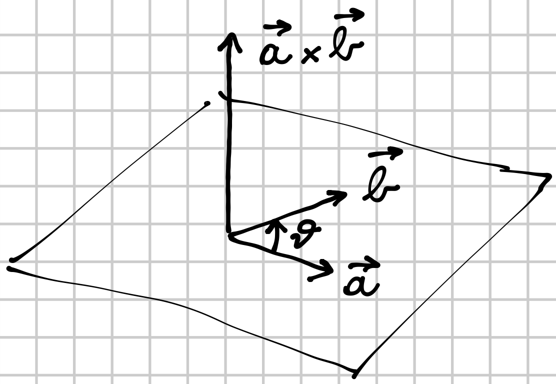
$$3x+\frac{3}{2}+y+\frac{1}{2}+z+2=0$$

$$\boxed{3x+y+z+4=0}$$

PRODOTTO VETTORIALE

$\vec{a} \times \vec{b}$ è un vettore che ha

- DIREZIONE perpendicolare al piano di $\vec{a}$ e $\vec{b}$
- VERSO dato dalla "REGOLA DELLA MANO DESTRA"
- MODULO

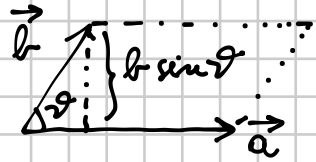


$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a\, b \cdot \sin\vartheta$$

ANGOLO CONVESSO TRA $\vec{a}$ E $\vec{b}$

è uguale all'area del parallelogramma che $\vec{a}$ e $\vec{b}$ formano

DALL'ALTO



IN COMPONENTI CARTESIANE

PREMESSA

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ MATRICE

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$ DETERMINANTE DELLA MATRICE

PRODOTTO VETTORIALE DI VETTORI IN COMPONENTI CARTESIANE

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \qquad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x)$$

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO VETTORIALE

- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (il prodotto vett. è ANTICOMMUTATIVO)
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ se e solo se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono paralleli
- k scalare $\Rightarrow$ $k(\vec{a} \times \vec{b}) = (k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b})$

APPLICAZIONE

Consideriamo le rette INCIDENTI in $P(1,-1,2)$

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

$$\vec{v} = (1,-2,3) \qquad \vec{w} = (-1,1,2)$$

Voglio trovare il piano che contiene r ed s.

Il vettore normale al piano è $\vec{v} \times \vec{w}$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= (-4-3)\vec{i} - (2+3)\vec{j} + (1-2)\vec{k} = -7\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k} = (-7,-5,-1)$$

Il piano cercato ha questo come vettore normale e passa per $P(1,-1,2)$

$$-7(x-1) - 5(y+1) - 1\cdot(z-2) = 0$$

$$-7x + 7 - 5y - 5 - z + 2 = 0$$

$$-7x - 5y - z + 4 = 0$$

$$\boxed{7x + 5y + z - 4 = 0}$$