SFERA NELLO SPAZIO

Dati $C(\alpha, \beta, \gamma)$ CENTRO $\quad r > 0$ RAGGIO

SFERA DI CENTRO C E RAGGIO r = luogo geometrico dei punti dello spazio che hanno distanza r da C

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2$$

$$x^2 + \alpha^2 - 2\alpha x + y^2 + \beta^2 - 2\beta y + z^2 + \gamma^2 - 2\gamma z - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \underbrace{-2\alpha}_{a} x \underbrace{-2\beta}_{b} y \underbrace{-2\gamma}_{c} z + \underbrace{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2}_{d} = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0}$$

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$$

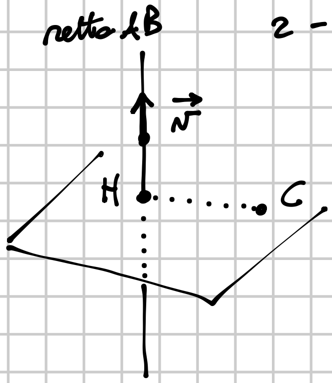
$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d}$$

ESAME 2023

3 Considerata la retta r passante per i due punti $A(1;-2;0)$ e $B(2;3;-1)$, determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica di centro $C(1;-6;7)$ e tangente a r.

Trovo la retta AB

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y+2}{3+2} = \frac{z-0}{-1-0} \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{5} = \frac{z}{-1}$$



$\vec{N} = (1, 5, -1)$ VETTORE DIREZIONE DELLA RETTA AB

$$a(x-x_C) + b(y-y_C) + c(z-z_C) = 0$$

$$1 \cdot (x-1) + 5(y+6) - 1 \cdot (z-7) = 0$$

$$x - 1 + 5y + 30 - z + 7 = 0$$

$x + 5y - z + 36 = 0$ PIANO $\perp$ retta AB passante per C

Trovo l'intersezione del piano con la retta

$$\begin{cases} x-1 = -z \\ \dfrac{y+2}{5} = -z \\ x+5y-z+36=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1-z \\ y+2 = -5z \Rightarrow y = -2-5z \\ 1-z+5(-2-5z)-z+36=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -7 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$1 - z - 10 - 25z - z + 36 = 0$$

$$-27z = -27 \Rightarrow z = 1$$

$H(0,-7,1)$

$$\overline{CH}^2 = (0-1)^2 + (-7+6)^2 + (1-7)^2 = 1 + 1 + 36 = 38$$

RAGGIO $\overline{CH}$

$C(1,-6,7)$

$$(x-1)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 = 38$$

$$x^2 + 1 - 2x + y^2 + 36 + 12y + z^2 + 49 - 14z - 38 = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 12y - 14z + 48 = 0}$$

80 Date le rette:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t, \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases},$$

e il punto $P(1; 0; -2)$ determinare l'equazione del piano passante per P e parallelo alle due rette.

(Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria, 2016, quesito 9)

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \vec{v} = (1, 2, 1)$$

$$\begin{cases} x + y + t - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -y + 3 - t \\ 2(-y + 3 - t) - y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ -3y + 6 - 2t = 0 \\ // \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 + \frac{2}{3}t + 3 - t \\ y = 2 - \frac{2}{3}t \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{3}t \\ y = 2 - \frac{2}{3}t \\ z = t \end{cases} \qquad \vec{w} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)$$

Le 2 rette <u>non sono parallele</u>

Il vettore normale al piano parallelo a entrambe le rette deve essere perpendicolare sia a $\vec{v}$ che a $\vec{w}$, quindi calcolo il prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{w}$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{vmatrix} = \left(2 + \frac{2}{3}\right)\vec{i} - \left(1 + \frac{1}{3}\right)\vec{j} + \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right)\vec{k} =$$

$$= \left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, 0\right)$$

Il piano cercato ha vettore normale $\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, 0\right)$ e passa per $P(1, 0, -2)$:

$$\frac{8}{3}(x - 1) - \frac{4}{3}(y - 0) + 0 \cdot (z + 2) = 0$$

$$\frac{8}{3}x - \frac{8}{3} - \frac{4}{3}y = 0 \implies 8x - 4y - 8 = 0 \implies \boxed{2x - y - 2 = 0}$$

83 Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria*, 2015, *quesito* 5)

$[x = y = -z]$

La retta perpendicolare al piano $x + y - z = 0$ ha vettore direzione $\vec{v} = (1, 1, -1)$.

Inoltre passa per $O(0,0,0)$.

EQ. PARAMETRICHE

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

EQ. CARTESIANE

$$x = y = -z$$