85 Nello spazio sono dati due piani α e β rispettivamente di equazione:

$$\alpha: x - 3y + z - 5 = 0; \quad \beta: x + 2y - z + 3 = 0.$$

Dopo aver determinato l'equazione parametrica della retta r da essi individuata, verificare che essa appartiene al piano γ di equazione

$$3x + y - z + 1 = 0.$$

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione straordinaria*, 2015, *quesito* 4)

$$r: \begin{cases} x - 3y + z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y + 5 - t \\ 3y + 5 - t + 2y - t + 3 = 0 \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y + 5 - t \\ 5y = -8 + 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3\left(-\frac{8}{5} + \frac{2}{5}t\right) + 5 - t = -\frac{24}{5} + \frac{6}{5}t + 5 - t = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}t \\ y = -\frac{8}{5} + \frac{2}{5}t \\ z = t \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}t \\ y = -\frac{8}{5} + \frac{2}{5}t \\ z = t \end{cases}$$

Per controllare che r giace nel piano $\gamma: 3x + y - z + 1 = 0$ sostituisco x, y, z della retta nel piano e verifico di ottenere un'IDENTITÀ

$$3\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}t\right) + \left(-\frac{8}{5} + \frac{2}{5}t\right) - t + 1 = 0$$

$$\cancel{\frac{3}{5}} + \cancel{\frac{3}{5}t} - \cancel{\frac{8}{5}} + \cancel{\frac{2}{5}t} - \cancel{t} + \cancel{1} = 0$$

$$0 = 0$$

OK, r giace nel piano γ

95 Determinare il luogo geometrico dei punti $P(x; y; z)$ equidistanti dai punti $A(0;1;2)$ e $B(-3; 2; 0)$.

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2018, *quesito* 9)

$[3x - y + 2z + 4 = 0]$

$$\overline{PA} = \overline{PB} \iff \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$$

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 1 - 2y + \cancel{z^2} + \cancel{4} - 4z = \cancel{x^2} + 9 + 6x + \cancel{y^2} + \cancel{4} - 4y + \cancel{z^2}$$

$$-6x + 2y - 4z - 8 = 0$$

$$\boxed{3x - y + 2z + 4 = 0}$$

55 Trova l'equazione della superficie sferica di centro $C(3; -1; 1)$ tangente al piano π: $3x + 4z - 38 = 0$.

$[x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z - 14 = 0]$

$$r = \text{distanza}(C, \pi) = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 38|}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 5^2$$

$$x^2 + 9 - 6x + y^2 + 1 + 2y + z^2 + 1 - 2z - 25 = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z - 14 = 0}$$

67 Sono dati il punto $P(-2;1;0)$ e il piano π di equazione $x+y+z=3$. Determina:

a. l'equazione della superficie sferica passante per P e tangente a π nel punto $Q(0;1;2)$;

b. le equazioni parametriche della retta r passante per P e Q;

c. l'equazione cartesiana di un piano π' parallelo a π e contenente il punto $R(-1;1;-2)$.

$$\left[\text{a) } x^2+y^2+z^2+2x-2z-1=0;\ \text{b) } \begin{cases} x=-2+2t \\ y=1 \\ z=2t \end{cases};\ \text{c) } x+y+z+2=0\right]$$

a)

La retta $\perp$ al piano π e passante per Q deve contenere il centro $C(x_c, y_c, z_c)$

Tale retta ha vettore direzione $\vec{v}=(1,1,1)$

$$\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=2+t \end{cases}$$

Impongo che $\overline{QC}=\overline{PC}$, cioè trovo il valore di t che corrisponde a $C(x_c, y_c, z_c)$, imponendo che la distanza di P da C sia uguale alla distanza di Q da C, cioè il raggio.

$Q(0,1,2)$ $\quad P(-2,1,0)$

$$C: \begin{cases} x_c=t \\ y_c=1+t \\ z_c=2+t \end{cases}$$ per un particolare t che devo trovare

$$(t-0)^2+(1+t-1)^2+(2+t-2)^2=(t+2)^2+(1+t-1)^2+(2+t-0)^2$$

$$\cancel{t^2}+\cancel{t^2}+\cancel{t^2}=\cancel{t^2}+4+4t+\cancel{t^2}+4+\cancel{t^2}+4t$$

$$8t+8=0 \Rightarrow t=-1 \qquad C(-1,0,1)$$

raggio $r=\overline{CQ}=\sqrt{(-1-0)^2+(0-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{3}$

$$(x+1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=3$$

$$x^2+1+2x+y^2+z^2+1-2z-3=0$$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2+2x-2z-1=0}$$

b] $Q(0,1,2)$ $P(-2,1,0)$

$\overrightarrow{PQ} = (0-(-2), 1-1, 2-0) = (2,0,2)$

vettore direzione

$\Downarrow$ divido per 2

$\vec{w} = (1,0,1)$

retta PQ : $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$

c] $\pi' : x + y + z + \underset{\text{DA TROVARE}}{d} = 0$

$\pi' // \pi$ dunque hanno lo stesso vettore normale $(1,1,1)$

π' passa per $R(-1,1,-2) \Rightarrow -1+1-2+d = 0 \Rightarrow d = 2$

π': $\boxed{x + y + z + 2 = 0}$

4 Scrivi l'equazione della retta r perpendicolare alle rette $s: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = -1-t \end{cases}$ e $t: \begin{cases} 3x+y-5=0 \\ 3x+z-2=0 \end{cases}$ nel loro punto comune.

..../15

Cerco il punto di intersezione:

$$\begin{cases} 3(1+t) + (2+t) - 5 = 0 \\ 3(1+t) - 1 - t - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3+3t+2+t-5=0 \\ 3+3t-1-t-2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4t=0 \\ 2t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} t=0 \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow t=0 \qquad P(1,2,-1)$$

$$s: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=-1-t \end{cases} \quad \vec{v}_s = (1,1,-1) \qquad t: \begin{cases} 3x+y-5=0 \\ 3x+z-2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 5-y \\ 3x = 2-t \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}t \\ y = 5-3x = 5-2+t = 3+t \\ z = t \end{cases} \qquad \vec{v}_t = \left(-\frac{1}{3}, 1, 1\right)$$

Devo trovare $\vec{v}_r = (\alpha, \beta, \gamma)$, vettore direzione di r, perpendicolare a $\vec{v}_s = (1,1,-1)$ e a $\vec{v}_t = \left(-\frac{1}{3}, 1, 1\right)$

1° MODO

$$\begin{cases} \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \\ \vec{v}_r \cdot \vec{v}_t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (\alpha,\beta,\gamma)\cdot(1,1,-1)=0 \\ (\alpha,\beta,\gamma)\cdot\left(-\frac{1}{3},1,1\right)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha+\beta-\gamma=0 \\ -\frac{1}{3}\alpha+\beta+\gamma=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \gamma - \beta \\ \beta = \frac{1}{3}\alpha - \gamma \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \gamma - \beta \\ \beta = \frac{1}{3}(\gamma-\beta) - \gamma = \frac{1}{3}\gamma - \frac{1}{3}\beta - \gamma = -\frac{2}{3}\gamma - \frac{1}{3}\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ \frac{4}{3}\beta = -\frac{2}{3}\gamma \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{3}{2}\gamma \\ \beta = -\frac{1}{2}\gamma \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 2 \end{cases} \qquad \vec{v}_r = (3,-1,2)$$

$\boxed{2^\circ \text{ MODO}}$ calcolo il prodotto vettoriale

$$\vec{v}_s \times \vec{v}_t$$

$$\vec{v}_s \times \vec{v}_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{4}{3}\vec{k} = \left(2, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

è multiplo di quello trovato prima

$$= \frac{2}{3} \cdot (3, -1, 2)$$

$\vec{v}_r = (3, -1, 2)$

passa per

$P(1, 2, -1)$

$$\boxed{r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}}$$

Se volessimo trovare il piano individuato dalle due rette:

$$3(x-1) - 1\cdot(y-2) + 2(z+1) = 0$$

ha $\vec{v}_r$ come vettore normale e passa per P

$$3x - 3 - y + 2 + 2z + 2 = 0$$

$$3x - y + 2z + 1 = 0$$

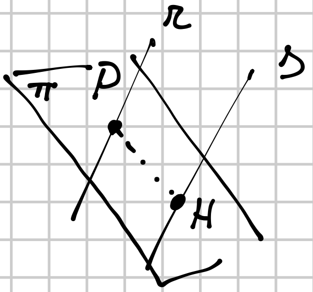
3 Calcola la distanza fra le rette $r: \begin{cases} x-2y+5=0 \\ x-2z-5=0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x=-11+2k \\ y=k \\ z=-8+k \end{cases}$.

...../15

$$r: \begin{cases} x-2y+5=0 \\ x-2z-5=0 \\ z=t \end{cases} \qquad \begin{cases} x=5+2t \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}(5+2t)+\frac{5}{2}=\frac{5}{2}+t+\frac{5}{2} \\ z=t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5+2t \\ y=5+t \\ z=t \end{cases} \qquad \vec{v}_r=(2,1,1)=\vec{v}_s$$, quindi r ed s sono parallele

Prendo $P(5,5,0)$ di r. Trovo il piano π perpendicolare a r
$t=0$ passante per P



$$2(x-5)+(y-5)+z=0$$

$$2x-10+y-5+z=0$$

$$2x+y+z-15=0$$

Interseco π con s e trovo H:

$$2(-11+2k)+k+(-8+k)-15=0$$

$$-22+4k+k-8+k-15=0 \qquad 6k=45 \qquad k=\frac{15}{2}$$

$$H\left(4, \frac{15}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{PH}=\sqrt{(5-4)^2+\left(5-\frac{15}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-0\right)^2}=\sqrt{1+\frac{25}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{30}{4}}=$$

distanza tra le 2 rette $= \boxed{\sqrt{\frac{15}{2}}}$