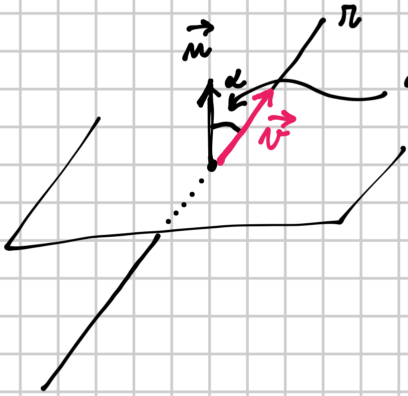
51 Calcola l'ampiezza dell'angolo ϑ formato dal piano di equazione $2x + y + z - 4 = 0$ con la retta di equazioni

$r: \begin{cases} 2x - z - 1 = 0 \\ 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$. [30°]



$90° - \vartheta$

$\vec{n}$ = vettore normale al piano

$\vec{v}$ = vettore direzione della retta

$\vec{n} = (2, 1, 1)$

trovo $\vec{v}$

$\begin{cases} 2x - z - 1 \\ 2y + z + 1 \\ z = t \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = 1 + z \\ 2y = -1 - z \\ z = t \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$

$\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = (2, 1, 1) \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Dato che il prodotto scalare è positivo, i due vettori $\vec{n}$ e $\vec{v}$ formano tra loro un angolo α acuto (come in figura)

$\vec{n} \cdot \vec{v} = |\vec{n}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$

$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} =$

α ACUTO

$$= \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$$

$$\boxed{\vartheta = 90° - 60° = 30°}$$

59 Considera le superfici sferiche di equazioni $x^2 + y^2 + z^2 = 20$ e $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 10z + 40 = 0$.

a. Verifica che sono tangenti e calcola il punto di contatto T.

b. Determina l'equazione del piano tangente.

$\left[\text{a) } T\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; \frac{10}{3}\right); \text{ b) } 2x + 4y + 5z - 30 = 0\right]$

$C_1(0,0,0) \quad r_1 = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$C_2(2,4,5) \quad r_2 = \sqrt{4+16+25-40} = \sqrt{5}$

$\overline{C_1C_2} = \sqrt{(2-0)^2 + (4-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{4+16+25} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = r_1 + r_2$

Dato che $\overline{C_1C_2} = r_1 + r_2$, le 2 sfere sono tangenti

La retta C_1C_2 è $\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \\ z = 5t \end{cases}$

$\overrightarrow{C_1C_2} = (2,4,5)$

Interseco la retta C_1C_2 con le 2 sfere:

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 20 \\ x = 2t \\ y = 4t \\ z = 5t \end{cases}$

$4t^2 + 16t^2 + 25t^2 = 20$

$45t^2 = 20$

$t^2 = \frac{4}{9} \quad t = \pm\frac{2}{3}$

$T_1\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}\right)$

$T_2\left(-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{10}{3}\right)$

$x^2+y^2+z^2-4x-8y-10z+40=0$

SOSTITUISCO LE COORD. DI T_1

$20 - 4\cdot\frac{4}{3} - 8\cdot\frac{8}{3} - 10\cdot\frac{10}{3} + 40 = 0$

$60 - \frac{16}{3} - \frac{64}{3} - \frac{100}{3} = 0 \qquad 0 = 0$ OK,

quindi T_1 è il punto di tangenza perché appartiene a entrambe le sfere

Per trovare il piano tangente

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=20 \\ x^2+y^2+z^2-4x-8y-10z+40=0 \end{cases}$$

sottraggo membro a membro

$$20-4x-8y-10z+40=0$$

$$-4x-8y-10z+60=0$$

$$\boxed{2x+4y+5z-30=0}$$